

Un déterminisme affranchi de la contrainte de prédictibilité

Eric Bois

Université Nice Sophia-Antipolis,
CNRS, Observatoire de la Côte d'Azur,
Laboratoire Cassiopée,
B.P. 4229, F-06304 Nice Cedex 04, France
e-mail: Eric.Bois@oca.eu

Avant-propos

Prédire, est-ce expliquer? Prédire, décrire, expliquer, que faisons-nous en sciences? Un ami érudit me disait un jour d'une manière lapidaire et quelque peu désabusé : « *Les anciens définissaient, les modernes décrivent, mais personne n'explique!* » Le mathématicien René Thom titrait l'un de ses ouvrages : « *Prédire n'est pas expliquer* »! Dans ce sillage, observer est-ce comprendre? Finalement, le réel est-il saisissable?

Il est bien connu que le chaos dynamique se manifeste par une limite de prédictibilité, une limitation aux calculs de prédiction. Mais dans ce cas, si selon un lieu commun quelque peu réducteur la bonne science consiste à faire de bonnes prédictions, trouver une limite de prédictibilité, serait-ce trouver une limite à la science? Aboutir ou produire des affirmations de non-prédictibilité, est-ce s'écarter d'un critère fondamental de science, serait-ce faire de la non science? L'article montre les raisons pour lesquelles la signification du chaos n'est pas réductible à un statut d'imprédictibilité pratique et combien la phénoménologie du chaos cache un déterminisme très fort.

J'eus un jour ouï-dire une assertion impertinente à propos des chercheurs créateurs de chaos : « C'est de l'esprit sans ordre que naît le génie du chaos ! » Mais la pertinence de cette affirmation s'arrête à son impertinence. La signification du chaos peut au contraire porter loin notre lecture du réel et considérablement élargir sa compréhension. Notre propos se situe dans le sillage de nos analyses épistémologiques

du chaos dynamique instruisant des facteurs fondamentaux de *dynamique de la nature*.¹ Il en résulte un renouvellement du rapport *déterminisme – prédictibilité*, propre à enrichir un aspect général de Philosophie de la nature. Ceci fait l'objet du présent article.

1. Introduction

1.1. Une approche du réel en science

« Le démon de Laplace », ou sa fantaisie, argue qu'il est possible de connaître les valeurs *exactes* des conditions initiales des problèmes et équations, qu'il est possible de connaître *toutes* les lois de la physique, de formuler *exactement* toutes les équations de mouvement, de résoudre les équations différentielles des systèmes *non-intégrables*, et enfin de *prédire exactement* le futur à l'aide d'expressions analytiques de forme fermée... Cette idée obsolète de maîtrise absolue de la physique contient implicitement la croyance que tout est prédictible.

Sans dresser un panorama exhaustif de la situation dans tous les champs de science contemporaine, quelques éléments simples suffisent à exorciser cet espoir de maîtrise et prédictibilité absolues. Selon un adroit classement de Szebehely (1991), quatre possibilités se présentent en dynamique :

- Des solutions exactes d'équations exactes. *On en trouve au collège et quelques-unes à l'Université!*
- Des solutions approchées d'équations exactes. *Des équations exactes sont améliorées chaque jour!*
- Des solutions exactes d'équations approchées. *Où comment jouer à trouver des équations qui auront des solutions connues!*
- Des solutions approchées d'équations approchées. *C'est le quotidien de la recherche en dynamique.* Et l'on pourrait subdiviser à l'infini cette quatrième possibilité avec des équations et leurs variétés de solutions associées qui représenteraient *un peu, beaucoup, pas du tout* la réalité...

¹ L'on pourra se reporter à nos travaux (Bois 1997, 1999, 2001a, 2001b, 2002a, 2003a, 2006).

Or, pour faire « vivre » en quelque sorte ces équations à représenter un tant soit peu la réalité, il convient de les amorcer avec de bonnes conditions initiales. Mais ces conditions initiales nécessaires à l'intégration des équations, comment sont-elles obtenues? Sont-elles établies par des mesures, des observations, ou bien tirées d'expériences de comportements passés? Quoi qu'il en soit, les conditions initiales sont approximées. C'est la *stabilité dynamique* qui est présupposée ou admise...

Les constantes de la physique réclamées par les équations, quelle est la cause de leur constance, de leur permanence au cours du temps? A travers l'espace? Quoi qu'il en soit, les constantes physiques ont des valeurs approximées. C'est la *stabilité structurelle* qui est présupposée ou admise...

En résumé, comment s'opère les relations entre nous et le système étudié? Au sujet des conditions initiales, nous utilisons des observations, des conjectures, de l'imagination... Le système dynamique intégré ne participe pas à cette variété et à ces choix; notre décision prise, il a ses propres conditions initiales. Au sujet des constantes de la physique, nous utilisons les meilleures valeurs disponibles. Pour le système, tout se passe comme s'il avait les vraies valeurs. Quant à la modélisation, nous utilisons des simplifications et des approximations. Pour le système, tout se passe comme s'il connaissait les vraies lois. Au sujet de la solution, nous utilisons des approximations numériques et analytiques. Le système évolue lui-même.

Autant en convenir, l'exorcisme est consommé : l'on ne « saisit » pas le réel, il s'approche, on l'approche. La science fondamentale est cette voie d'expertise en prise avec les propriétés de la nature, en prise avec un réel récalcitrant qui dicte son altérité au travers, au-delà, au détriment de toutes nos aspirations ou projections de sens et de non-sens. La science est ce chemin performant mais déroutant face à un réel insaisissable qui se laisse pourtant approcher toujours plus, toujours mieux, mais qui, *in fine*, échappe encore.²

² Pour un développement des critères de science et de la méthode scientifique, l'on pourra se reporter au premier chapitre de notre ouvrage (Bois 2002a).

Il est désormais relativement bien admis, pour le moins expérimenté, que les sciences physiques n'opèrent pas une « saisie » du réel mais bien une approche de celui-ci, incessante en compréhension, croissante en précision, *approche à jamais asymptotique* au réel.³ Aux notions scientifiques classiques de *réduction*, *maîtrise*, *prédictibilité*, *exhaustivité* se substituent aujourd'hui des notions d'*irréductibilité*, d'*incertitude*, d'*imprédictibilité*, d'*incomplétude*... De plus, si toutes les lois de la physique ne sont pas d'une manière univoque des lois de la nature, il semble bien s'identifier quelques premiers principes à l'intelligibilité mathématique, de sorte que les bonnes *lois approchées* de la nature sont asymptotiques à des propriétés mathématiques bien définies.⁴ De ce fait, la nature est « connaissable », bien que non exclusivement, par des propriétés mathématiques qui constituent une armature formelle de son intelligibilité.

1.2. La dynamique et les systèmes dynamiques

De l'infiniment petit à l'infiniment grand, tout dans l'Univers, et l'Univers lui-même, se produit en mouvement et en mouvement permanent. Tout se meut ou se transforme comme si l'essence première du « mouvement » était un principe d'être co-extensif de l'existence même de la nature de l'Univers et de l'univers de la Nature (Bois 2002a). La Dynamique, comme *science du mouvement*, s'est donnée pour programme la compréhension pleine et causale des mouvements de la nature, en particulier les mouvements macroscopiques.

L'astrodynamique, en particulier, est consacrée aux multiples mouvements célestes des astres du cosmos, de l'échelle planétaire à l'échelle galactique et au-delà. Traditionnellement, la dynamique des corps célestes du Système solaire (planètes et

³ Au demeurant, cette approche asymptotique du réel par la science s'avère homogène à une attitude d'ouverture à « l'être » qu'aucune définition philosophique ne saurait épuiser... D'où l'intérêt et la primauté d'une science de l'être en tant qu'être, ni confondu à « l'existence » comme généralement en science, ni identifié à « la nature » comme souvent en philosophie de la nature, mais bien l'être indépendamment de ses déterminations particulières, comme juste métaphysique où l'étonnement d'être s'avère premier. Le raisonnement lui succède, ruinant la primauté d'une métaphysique intellectuellement greffée sur la logique.

⁴ En matière de systèmes dynamiques, des mouvements célestes en particulier, nous aurons plus loin une illustration significative et exemplaire de cette idée avec l'évolution de la notion de *stabilité dynamique* selon Lagrange, puis Poisson et finalement Poincaré–Lyapunov.

petits corps, astéroïdes, comètes et météores) comme la dynamique globale du Système solaire dans son ensemble traduisent le champ propre de la Mécanique Céleste. Depuis un peu plus d'une décennie, l'on détecte des planètes en dehors de notre Système solaire. Ces planètes extrasolaires sont en orbite autour d'autres étoiles que notre Soleil et arborent des caractéristiques astrométriques surprenantes (planètes géantes, proches de l'étoile centrale et en révolution sur des orbites à grandes excentricités...). Avec deux, trois, voire quatre planètes géantes proches, ces nouveaux systèmes planétaires « serrés », que l'on aurait pu penser hautement instables, tiennent en fait leur stabilité dynamique à des mécanismes fins et étonnants. De la sorte, la dynamique des systèmes célestes s'est aujourd'hui ouverte à un nouveau laboratoire naturel où il est frappant de constater la prouesse ou « l'imagination » des possibilités dynamiques de la nature (Bois *et al.* 2003; Dvorak *et al.* 2004; Gayon & Bois 2008a, 2008b, 2009; Goździewski *et al.* 2001; Kiseleva-Eggleton *et al.* 2002a, 2002b, 2003). Les systèmes planétaires traduisent l'une des classes de l'immense variété des systèmes dynamiques.

La dynamique est nécessairement sous-tendue par un principe de gravitation (Newtonien, Einsteinien...). La relation dynamique résultante se présente, depuis la loi dite de la gravitation « universelle », comme l'archétype mathématisé de la relation causale.⁵ En effet, la causalité s'est dotée d'une tournure « plus physique » par la double invention du calcul différentiel et des premières lois de la dynamique où le temps, définit *in abstracto* comme paramètre d'évolution, s'inscrit dans les équations du mouvement. Ainsi, la deuxième loi de Newton, en établissant une relation analytique entre la force appliquée sur un corps et l'accélération de sa trajectoire, relie une cause – en l'espèce, la force – et un effet – en l'espèce, la variation de mouvement du corps – selon une relation différentielle impliquant un intervalle infinitésimal d'instant.⁶ Dès lors, l'ordre de la *causalité différentielle* se prête à la modélisation physico-

⁵ Il reste que cet archétype, comme presque toute la physique contemporaine, ne contient pas la flèche du temps. Celle-ci demeure induite et toutefois corroborée par le fait de l'*irréversibilité* que l'on appréhende, par exemple, dans les systèmes dynamiques dissipatifs.

⁶ L'exemple se déclinerait autrement en relativité générale où la notion de force n'existe plus : la gravité est une propriété de l'espace-temps. Aussi, selon une synthèse fameuse de John A. Wheeler, *l'espace-temps courbe* indique aux particules comment se mouvoir et la matière indique à l'espace-temps comment se courber. L'inertie résiste à l'accélération relativement à l'espace. L'espace agit sur les objets mais les objets n'agissent pas sur l'espace. Pour Einstein, l'espace-temps courbe est la gravité. Le contraste est frappant avec la vision Newtonienne où la force indique à la masse comment s'accélérer ($F = m \times a$) et la masse indique à la gravité comment exercer une force ($F = GMm/r^2$).

mathématique et celle-ci ne peut laisser aucune prise au scepticisme Humien quant à la coïncidence : les mêmes causes produisent les mêmes effets, à volonté... Plus généralement, les principes de causalité usuelle en science fondent la modélisation scientifique et ses performances.⁷ Il est de l'effort de la modélisation de représenter les relations de causes à effets comme d'en éprouver la reproductibilité et la précision face à des conditions d'expériences adéquates. *La science est la connaissance certaine par les causes*, disait Aristote en son temps. De fait, l'ordre de la causalité, *versus* celui de la coïncidence, c'est bien celui de la science.⁸

La quintessence du chaos trouve sa source d'intelligibilité dans l'étude approfondie des systèmes dynamiques. Par définition, les *systèmes dynamiques* sont des systèmes dont l'évolution temporelle est décrite par un nombre fini d'équations *déterministes*. Ces systèmes dynamiques sont conservatifs ou dissipatifs suivant que l'énergie totale se conserve ou se dissipe (par perte ou par transfert). Les systèmes dynamiques conservatifs se caractérisent – et ceci rend spécifique leur étude – par l'existence de points fixes (stables et instables) dans *l'espace des phases*⁹ et de solutions *quasi-périodiques* autour des points stables. Les systèmes dynamiques, conservatifs et dissipatifs, demeurent pleinement déterministes.

Les systèmes dynamiques étant déterministes et suffisants pour produire du chaos,¹⁰ ils se présentent comme étant les plus sobres et les plus économiques – en particulier les systèmes conservatifs – pour cerner de façon sûre la « traçabilité » du chaos.¹¹ Or, il s'agit d'interroger le rapport de l'impossibilité à produire des prédictions vis-à-vis de l'imprévisibilité réelle et intrinsèque. Nous nous situerons donc dans le

⁷ Une explicitation du contenu, du fonctionnement et de la puissance interactive de la notion de *modèle scientifique* est développée au premier chapitre de notre ouvrage (Bois 2002a).

⁸ Pour un développement substantiel de la *causalité*, son histoire et ses méandres, ses limites et ses possibilités de l'enrichir aujourd'hui, l'on pourra se reporter à nos travaux (Bois 2000b, 2001c, 2002a, 2003b et Bois & Trelut 2006).

⁹ *Espace des phases* (en dynamique) : espace où le corps étudié est repéré par ses positions et vitesses (dans l'espace ordinaire, *i.e.* *l'espace de configuration*, il ne l'est que par ses seules coordonnées de position). En général, une coupe tracée dans l'espace des phases signifie que l'on a balayé une grande variété de conditions initiales de positions et vitesses.

¹⁰ Ainsi le problème des 3 corps; sa mise en équations demeure étonnamment simple compte tenu de l'enseignement dont il est porteur.

¹¹ Notamment par rapport aux systèmes stochastiques où le déterminisme et le hasard peuvent être volontairement et astucieusement mêlés.

cadre des systèmes dynamiques conservatifs. Nous verrons qu'il existe néanmoins différents niveaux de signification du *chaos déterministe*.

Classiquement, le déterminisme suppose la prédictibilité. Par conséquent, dans ce contexte du déterminisme ordinaire, la causalité recoupe implicitement la faculté de prédictibilité totale. Dès lors, l'on pourrait s'interroger sur ce que devient la simplicité de la causalité usuelle lorsque le déterminisme s'affranchit de la notion de prédictibilité? Ce point est en dehors de notre propos, mais l'on pourra consulter avec grand intérêt la thèse d'Espinoza (2006) où le *déterminisme causal* est affirmé comme premier principe de l'intelligibilité naturelle.

2. Le Système solaire

Le Système solaire tient pour exemple mythique de régularité céleste. Cependant, qui n'a pas lu ou entendu dire qu'il était en fait « chaotique », rompant de fait avec l'idée sous-entendue de régularité? L'examen de différentes propriétés (existence d'une limite de prédictibilité, durée de stabilité, chaos...) nous aidera à dissiper l'équivoque, tout en approchant la face cachée du déterminisme.

Les planètes du Système solaire suivent, en première approximation, les lois de Kepler. Cela signifie qu'il est possible de construire un premier « état des lieux » du Système solaire, à la manière d'un puzzle, en supposant tour à tour le mouvement de chaque planète comme si elle était seule à tourner autour du Soleil. Chaque orbite est alors elliptique, fixe et invariable et suit parfaitement les lois de Kepler. Autrement dit, la dynamique du problème des deux corps constitue l'archétype primaire de la structure dynamique du Système solaire.¹² Le problème des deux corps est *intégrable* et cet archétype constitue une solution parfaitement périodique, en l'occurrence une orbite Képlérienne. Bien entendu, les interactions gravitationnelles entre les planètes viennent bousculer ce bel édifice. Les intégrales premières du mouvement sont perdues et notre simple assemblage de problèmes à deux corps devient un authentique problème à *N* corps. Or, depuis les travaux fondateurs d'Henri Poincaré à la fin du XIXe siècle, nous

¹² Plus globalement, la structure dynamique du Système solaire peut s'apparenter à un système multi-pendulaire multi-résonant...

savons que les trajectoires du problème des N corps (avec $N > 2$) sont susceptibles d'être *irrégulières*, c'est-à-dire *chaotiques*. Qu'est-ce à dire exactement ?

Avant de revenir sur la compréhension de la situation dynamique du Système solaire pris en tant que problème à N corps, considérons l'effet des interactions planétaires sur les trajectoires consécutives de la Terre. La Figure 1 représente une série de ces trajectoires consécutives, constituant dans l'espace de configuration, tour après tour, l'amorce d'un tore.¹³ Sans les interactions mutuelles des planètes, l'épaisseur de ce « tore » se réduirait à une simple ellipse, fixe et invariable, tour après tour reproduite. Mais avec l'action des perturbations planétaires, le volume du tore reste toutefois relativement fin et sa constitution confinée et régulière; les trajectoires successives s'enroulant en quelque sorte autour de l'orbite périodique de base. A défaut de périodicité stricte, les trajectoires restent *quasi-périodiques*.¹⁴ Et de plus, l'on peut aussi concevoir qu'une orbite Képlérienne, issue du problème des deux corps, puisse constituer une bonne orbite moyenne pour une théorie des perturbations.

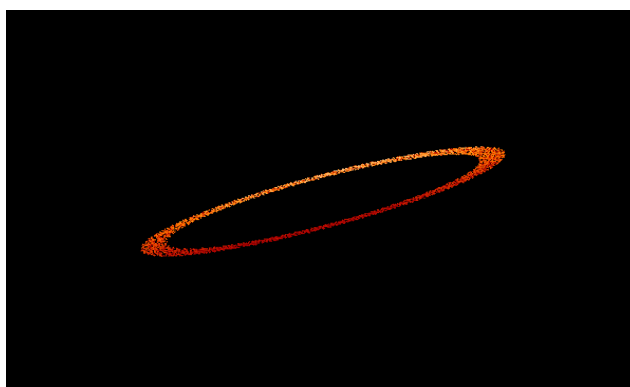


Fig. 1. Tore 3-D de la Terre (une centaine d'orbites).

¹³ Les Figures 1 et 2 sont issues du modèle SONYR©E.Bois-CNRS-Cassiopee (Spin-Orbit N -body Relativistic model) d'intégration du Système solaire (Bois & Vokrouhlicky 1995, Bois & Girard 1999, Bois 2000a, Bois & Rambaux 2007). La Figure 1 ne contient qu'un très petit nombre d'orbites, soit une centaine, en vue d'une comparaison cohérente avec la Figure 2. D'intégration relativiste ou non, les Figures 1 et 2 seraient visuellement les mêmes.

¹⁴ Nous reviendrons sur cette notion de quasi-périodicité.

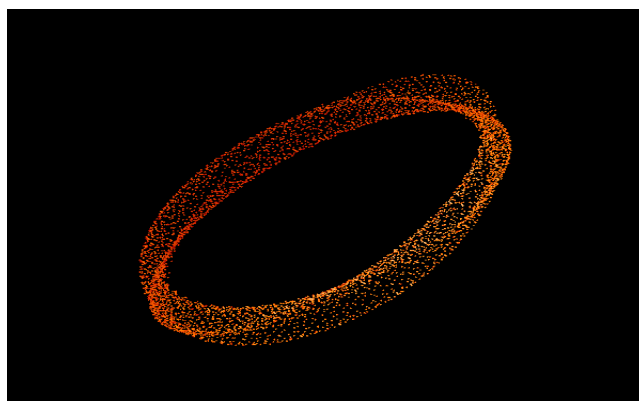


Fig. 2. « Tore » 3-D de la Lune (une centaine d'orbites).

Ce point précis – une orbite moyenne Képlérienne – ne va plus de soi dans le cas du développement d'une théorie du mouvement de la Lune. Considérons alors le système constitué par le Soleil, la Terre et la Lune, de masses ponctuelles, en interactions gravitationnelles. La trajectoire de la Lune, cumulée tour après tour autour de la Terre, donne la formation du « tore » 3-D représenté en Figure 2. L'on appréciera la complexité de sa géométrie spatiale en forme de couronne torsadée. L'on comprend ici pourquoi il eut été inapproprié de chercher une bonne théorie de la Lune en perturbant une orbite Képlérienne. Le mouvement orbital de la Lune autour de la Terre s'écarte rapidement et fortement d'une orbite Képlérienne. La présence du Soleil vient rompre la simplicité d'une représentation moyenne prévue pour le problème des deux corps.

La Lune inaugure le fameux problème des trois corps et, pendant plus de deux siècles (XVIII et XIX^e siècles), la théorisation de son mouvement constituera la difficulté majeure de la Mécanique Céleste appliquée. Cela étant le mouvement de la Lune garde lui aussi des propriétés de quasi-périodicité, mais dans un domaine de stabilité à la structure topologique plus complexe (cf. Fig. 2) Ces propriétés justifient qu'il fut néanmoins possible, bien que plus difficile, de développer des théories analytiques ou algébriques et de produire ainsi des éphémérides, au sens très prédictif du terme. Aux XVIII et XIX^e siècles en effet, bien des méthodes de navigation étaient basées sur l'observation de la position apparente de la Lune par rapport aux étoiles. La navigation

maritime avait donc besoin de tables précises du mouvement de la Lune. Les recherches sur le mouvement de la Lune furent ainsi stimulées par les amirautés maritimes et contribuèrent très largement à l'essor de la Mécanique Céleste dans son ensemble.¹⁵

Or, le problème des trois corps demeure l'exemple non seulement historique mais encore emblématique d'un problème aux équations simples, et pourtant suffisant pour produire du chaos ! Il suffit de considérer 3 points matériels de masses m_i à des distances mutuelles r_{ij} , soumis selon une loi de force Newtonienne au potentiel mutuel U tel que :

$$U = \frac{m_1 m_2}{r_{12}} + \frac{m_1 m_3}{r_{13}} + \frac{m_2 m_3}{r_{23}} \quad (1)$$

Le grand mathématicien et physicien Henri Poincaré montrait à la fin du XIX^e siècle qu'un tel problème des trois corps en interaction gravitationnelle pouvait avoir des solutions impliquant des trajectoires *irrégulières*, c'est-à-dire ni périodiques, ni quasi-périodiques.¹⁶ Par conséquent, pour ces trajectoires, le calcul des prédictions de positions est mis à mal. Pour illustrer ce phénomène de perte de prédictibilité, poursuivons avec l'étude du système à trois corps suivant : Soleil, Terre et Lune de masses ponctuelles. Considérons ce problème dans les conditions particulières où les interactions gravitationnelles sont réduites au champ du Soleil s'exerçant sur le couple Terre-Lune, lui-même en interaction mutuelle.¹⁷ Et sous cette configuration, intéressons-nous au mouvement de la Lune.

Mais une seule solution issue d'une seule intégration numérique des équations du problème, à partir d'un seul jeu de conditions initiales, ne donnerait qu'une seule trajectoire faite des positions successives de la Lune en fonction du temps. Cette trajectoire isolée selon une vue particulière et limitée serait incapable de nous renseigner

¹⁵ L'on peut citer les travaux des mathématiciens Euler, Clairaut, d'Alembert, Lagrange et Laplace ainsi que les trois premières grandes et désormais mythiques théories de la Lune : celles d'Hansen, de Delaunay et d'Hill-Brown.

¹⁶ Poincaré (1892, 1893, 1899).

¹⁷ Il s'agit du problème de Hill (voir par exemple Hénon 1969).

sur la diversité d'avenir à long terme de ses propriétés. Il nous faut une vision globale de la variété des comportements dynamiquement possibles. Il nous faut donc produire n trajectoires ou solutions, par n intégrations du même système d'équations à partir d'un large balayage des conditions initiales. Or, grâce aux travaux de géométrie globale de Poincaré, nous savons que la connaissance des propriétés des trajectoires s'obtient par la géométrie des structures que forment les points d'intersection des trajectoires, tour après tour, dans un même plan de coupe convenablement choisi. Il s'agit d'une *section de Poincaré*.¹⁸

La Figure 3 exprime ainsi la variété des trajectoires possibles de la Lune dans les conditions de notre problème. Le plan de cette section est orthogonal au plan de l'orbite périodique qu'aurait la Lune en l'absence du Soleil (problème intégrable des deux corps). Ce plan, contenant le Soleil et le barycentre Terre-Lune, est en mouvement uniforme autour du Soleil. Ce plan est donc traversé par la Lune, tour après tour, dans son mouvement autour de la Terre. De la sorte, chaque point ne traduit pas la position du corps quelque part sur son orbite mais la signature d'une trajectoire orbitale tour après tour. Les interactions mutuelles de ce problème à trois corps associées au balayage d'une variété de conditions initiales (positions et vitesses) font que les points ne se cumulent pas aux mêmes endroits de l'espace des phases, loin s'en faut. Si l'on s'était limité aux conditions initiales strictes de la rotation synchrone de la Lune autour de la Terre,¹⁹ un tel diagramme ne produirait que des îles de librations stables, sous forme de courbes fermées imbriquées. En s'écartant un peu de ces conditions initiales particulières, l'on obtient la coupe représentée en Figure 3 et sa variété de structures (voir légende Fig. 3).

Observons la répartition des points obtenus. Au cours de la simulation, des points aux conditions initiales successives se répartissent de manière ordonnée, en

¹⁸ *Section de Poincaré* (ou surface de section) : intersections successives d'une trajectoire, tour après tour, avec un plan de coupe spécifique (plus généralement une surface). Chaque point, aux coordonnées prélevées dans l'espace des phases, est la signature d'une trajectoire qui a traversé le plan.

¹⁹ La période de révolution orbitale de la Lune est la même que sa période de rotation sur elle-même; c'est une résonance spin-orbite 1:1. Il en résulte que la Lune nous montre toujours la même face. A noter qu'il y a résonance dès lors qu'il existe des rapports de commensurabilité entre différentes périodes de mouvements d'un même système.

formant *in fine* des structures régulières; ils traduisent des trajectoires régulières. D'autres points semblent remplir toute une région du plan de manière désordonnée et aléatoire. La prédictibilité est perdue. Des conditions initiales, aussi voisines que l'on veut, provoquent dans ces régions des points non seulement éloignés les uns des autres mais ne constituant, tour après tour, aucune structure particulière. Les trajectoires correspondantes, dites *irrégulières*, sont exponentiellement divergentes les unes des autres. C'est un comportement *chaotique*.

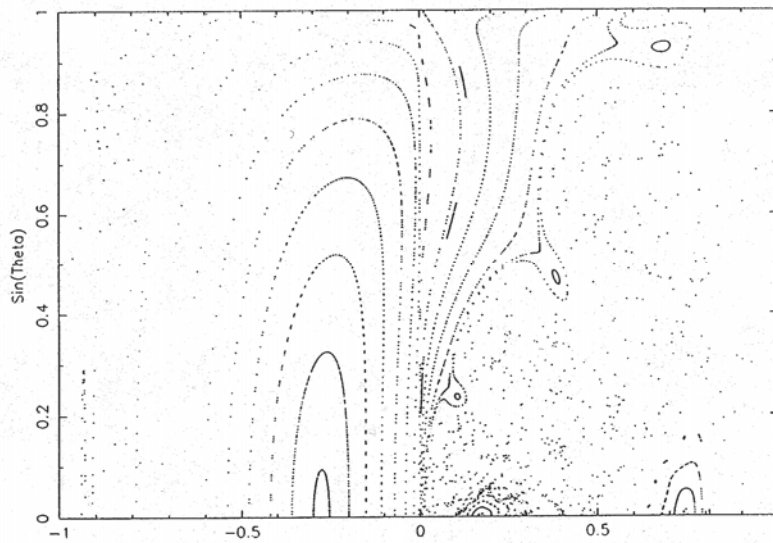


Figure 3. Surface de section du problème de Hill pour une valeur de la constante de Jacobi $C = 9.00$. Les orbites sont dites *régulières* ou *irrégulières*, i.e. *chaotiques*, selon la répartition respectivement ordonnée ou désordonnée des points successifs. Les orbites sont rétrogrades ou directes pour des abscisses respectivement négatives ou positives (axe horizontal x). Les îles, sous forme de structures fermées, représentent des orbites quasi-périodiques stables.

Cette Figure est extraite de l'*Atlas of the Circular Planar Hill's Problem* par Chauvineau et Mignard (Edition restreinte, Observatoire de la Côte d'Azur, janv. 1991).

En observant plus particulièrement les régions désordonnées de la section (Fig. 3), régions appelées *zones chaotiques*, les points apparaissent dispersés au hasard. Pour le moins, le chaos présente l'apparence du hasard ! La question immédiate est la suivante : comment des systèmes dynamiques obéissant à des lois complètement

déterministes, ne comportant aucun élément aléatoire, pourraient néanmoins avoir une évolution apparemment indiscernable d'un mouvement erratique !? Comment comprendre cette apparence ?

En principe, les systèmes dynamiques sont déterministes au sens où des prédictions peuvent être faites pour toute date dans le temps. Ces prédictions ne sont pas nécessairement pleines de sens, mais dans les calculs, le *déterminisme* signifie que la succession temporelle de deux états de mouvement se fait d'une manière *unique*.²⁰ En pratique, des déviations sont amplifiées exponentiellement dans ces régions dites chaotiques de telle sorte que les positions ne sont plus prédictibles. Les systèmes dynamiques, bien que déterministes, ne sont plus alors totalement prédictibles.

Mais quelles peuvent être les raisons de ces déviations ? Faut-il les attribuer aux formulations approchées des équations de mouvement ? Aux erreurs dans les conditions initiales ? Aux erreurs numériques (d'arrondis et d'intégrations) ? Bref, sommes-nous en présence de l'effet de l'ordinateur : le résultat représente-t-il la dynamique du problème ou bien l'ordinateur ?

Plus fondamentalement, une autre question se pose. Le résultat, représente-t-il la dynamique du système ou bien traduit-il vraiment la dynamique de la réalité ? Cette question tout à fait classique, liée au rapport usuel entre des équations et la réalité, ne prend-elle pas une tournure particulière en cas de conclusions «non-régulières» ?

3. Le chaos par propriété de non-intégrabilité

3.1. L'intégrabilité au sens de Poincaré

Dans ses *Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste*, Henri Poincaré ne se limite pas au cas du problème des trois corps. Il démontre que la plupart des systèmes dynamiques ne sont pas « intégrables » et sont par conséquent soumis à ce type de comportement dit *chaotique*. Quelle est donc cette propriété de non-intégrabilité ? Comment peut-elle engendrer un comportement de type chaotique ?

²⁰ Définition à comparer avec celle d'un *déterminisme absolu*, ou *Laplacien*, qui voudrait que le passé et le futur puissent découler d'une manière unique du présent.

Un système est dit *intégrable*, au sens de Poincaré, s'il possède une intégrale indépendante du mouvement pour chacun de ses degrés de liberté.²¹ Cette intégrale est dite « intégrale première » et elle correspond à une loi de conservation d'une grandeur de la physique (par exemple l'énergie totale ou le moment angulaire). La fonction $F(x_j, t) = C$ est une intégrale première d'un système dynamique représenté par les équations différentielles du mouvement $\dot{x}_i = G_i(x_j, t)$ si, le long de toute trajectoire, la relation suivante est satisfaite :

$$\frac{dF}{dt} - \sum_i \frac{\partial F}{\partial x_i} G_i - \frac{\partial F}{\partial t} = 0 \quad (2)$$

En fait, la définition originale de la non-intégrabilité, donnée par Poincaré en 1892, fait état qu'il ne peut exister, pour le problème gravitationnel des N corps avec $N \geq 3$, d'autres intégrales analytiques et globalement valides outre celles de l'énergie, du moment angulaire et du barycentre de masse. Par conséquent, les trajectoires résultant du problème des N corps (avec $N > 2$) sont susceptibles d'être irrégulières, c'est-à-dire (i) qu'il existe une variété de conditions initiales pour lesquelles le système est *chaotique* et (ii) l'évolution temporelle du système menace à plus ou moins long terme de *basculer dans le chaos*. La première clause est une propriété « en acte », la deuxième une propriété « en puissance ».

La situation s'est ensuite en quelque sorte stratifiée avec la démonstration du fameux théorème KAM.²² Ce théorème exprime en effet que, sous des perturbations suffisamment faibles, un mouvement intégrable reste dans une large mesure régulier. Bien que les intégrales globales n'existent plus en vertu du théorème de Poincaré, une forte proportion de solutions gardent des propriétés voisines des solutions du cas intégrable. Le théorème KAM, en montrant que les trajectoires restent confinées dans un certain voisinage, statue qu'il existe un domaine de stabilité autour de la trajectoire périodique de base du problème intégrable. Le faisceau de trajectoires consécutives

²¹ A noter que les problèmes à un seul degré de liberté sont intégrables.

²² Les versions fondatrices de ce théorème ont été obtenues par Kolmogorov (1954), Moser (1962) et Arnold (1963).

reste ainsi confiné dans un domaine borné, en l'occurrence sous forme de tores à la surface desquels se déploient des solutions quasi-périodiques. Il existe en définitive une relation objective entre les notions de *quasi-périodicité* et de *stabilité dynamique*.

La stabilité au sens de Lagrange correspondait à la stricte périodicité de la trajectoire; au sens de Poisson, elle se suffit d'un certain voisinage par rapport à la position initiale. Au sens de Poincaré-Lyapunov, elle concerne désormais l'écart entre une trajectoire périodique et les trajectoires voisines, si l'écart se maintient, la trajectoire est stable. Dans les systèmes conservatifs, des orbites quasi-périodiques restent toujours confinées dans certaines limites, en ce sens elles sont *stables*.

Mais en raison de la deuxième clause corollaire du théorème de Poincaré, il existe toutefois une *limite temporelle à la durée de stabilité* des solutions quasi-périodiques d'un système dynamique non-intégrable. Nous comprenons dès lors le cas du Système solaire pour lequel la durée de stabilité, bien que considérable, est limitée dans le temps, environ une à deux centaines de millions d'années.²³ Il ne s'agit pas en outre d'une durée nominale de stabilité, générique pour tout système planétaire. Loin s'en faut. Les systèmes de planètes extrasolaires évoqués plus haut s'avèrent généralement irréductibles au problème des deux corps et leur durée de stabilité est de ce fait beaucoup moins longue.

Si la stabilité du Système solaire est limitée dans le temps, elle l'est aussi dans l'étendue de son espace des phases traduisant l'ensemble des valeurs possibles des paramètres orbitaux des planètes. Due à la proximité inévitable de résonances et leurs entrelacements, co-existent des zones chaotiques dans l'espace des phases du Système solaire, aux voisinages de certains de ses paramètres actuels, notamment de ceux de Saturne...²⁴

²³ Il conviendrait de détailler la haute régularité du système constitué des planètes extérieures géantes en regard de la chaotité du système des planètes intérieures telluriques. Voir Laskar (1989, 1990, 1994) et Hubbard et Hubbard (1995).

²⁴ Le comportement du système Soleil-Jupiter-Saturne est sensible à de petits changements dans les éléments orbitaux de Saturne de telle sorte qu'une légère modification d'entre eux par rapport à leurs valeurs actuelles entraîne le mouvement des planètes joviennes dans une zone chaotique robuste, associée à la proximité de la résonance en moyen mouvement 5:2 entre Jupiter et Saturne; la quasi-périodicité est totalement perdue (Varadi *et al.* 1999; voir de plus Morbidelli 2002).

3.2. Définition conventionnelle du chaos dynamique

Dans les systèmes dynamiques conservatifs, le chaos dynamique se définit par un comportement *ni périodique, ni quasi-périodique* – c'est-à-dire irrégulier – lié à la nature *non-linéaire* inhérente au système, notamment lorsque celui-ci contient des *résonances*. Autrement dit, la dynamique chaotique nécessite la non-intégrabilité. Le chaos dynamique est la « marque » des systèmes dynamiques non-intégrables. Les sections de Poincaré montrent de l'irrégularité, généralement en plus des comportements réguliers.²⁵

Le « cœur » du chaos dynamique découle ainsi d'une propriété mathématique, celle de *non-intégrabilité* au sens de Poincaré. Le chaos est conventionnellement défini par un comportement non quasi-périodique, lié aux causes constitutives de la non-intégrabilité des systèmes, comme la non-linéarité, l'instabilité et les résonances. En conséquence, la signification épistémologique du chaos dynamique est fondée sur son essence mathématique. La relation entre l'instabilité et la chaotité est alors que le système manifeste une *haute sensibilité* aux changements de conditions initiales : de petites causes provoquent de grands effets.²⁶ En conséquence, comment négliger quelques incertitudes initiales dès lors que ces dernières portent la capacité d'une divergence !? Mais aussi comment ne négliger aucune incertitude initiale !? Les conditions initiales d'un système réaliste ne seront jamais suffisamment exactes tandis que les ordinateurs n'auront jamais une infinité de décimales. Mais cette limitation pratique n'est pas le cœur du problème. D'une part, si les équations portent le statut de *causalité formelle*,²⁷ les conditions initiales ont celui de *causalité efficiente*, causes secondes à jamais devant les causes formelles à jamais perfectibles. D'autre part, le chaos n'est pas réductible à une question de calculs sur ordinateur, il s'agit bien d'un

²⁵ Les exemples classiques de surfaces de section « à la Poincaré » témoignent de cette mixité de comportements réguliers et irréguliers dans l'intégration d'un même système.

²⁶ Il est un fameux exemple imagé issu de la météorologie dynamique, « l'effet papillon », qui illustre un tel comportement dans les équations de Lorenz (Lorenz 1963).

²⁷ La *causalité formelle* étendue au sens des formes structurelles, constitutives et *dynamiques*, permet de rendre compte des principes de la dynamique des structures (Bois 2000b).

comportement phénoménal endogène.²⁸ De nombreux exemples de physique expérimentale l'attestent sans équivoque.²⁹ En définitive, dans la réalité comme sur ordinateur, les états futurs (ou passés) ne peuvent être calculés et donc prédits à partir des prises de mesures présentes.

Si le chaos issu des systèmes conservatifs et dissipatifs se caractérise par une *limite de prédictibilité* et un apparent désordre des points et des trajectoires sur les coupes, aux allures de « fait du hasard », il n'est donc pas sans dissimuler un *déterministe* très fort. Dans les systèmes dynamiques non-linéaires à plusieurs degrés de liberté, le chaos se produit assez généralement autour des résonances, mais ni les données d'entrée aléatoire, ni la complexité ne sont nécessaires à produire du chaos. Nulle intervention du hasard ne peut être invoquée. Le chaos dynamique est fondamentalement l'issue de la nature non-intégrable des systèmes dynamiques de ce genre. Or, les phénomènes de la nature sont généralement mieux représentés par des systèmes non-intégrables ! Et nul n'est besoin d'observer que la variété des équations intégrables ne constitue qu'une infime sous-classe de l'immense variété des équations non-intégrables qui tissent le quotidien des scientifiques dont les équations servent de rail à leurs recherches. Il s'ensuit que détecter du chaos traduit moins un réel challenge que de caractériser le degré de chaotité (faible, large, profond...) et de comprendre par là même la structure et les capacités dynamiques d'un système incluant une variété de possibilités d'évolution.

Pour une approche de la compréhension de la non-intégrabilité d'un système dynamique, c'est-à-dire des raisons mathématiques qui concourent à cette vertu, le lecteur pourra se reporter à tout ouvrage spécialisé ou à nos propres analyses (*e.g.* Bois 2006).³⁰

²⁸ L'exemple purement mathématique de l'itération de la fonction de Feigenbaum, avec sa cascade de doublements périodiques, le montre à l'évidence. Ce qui compte dans cette fonction, c'est sa structure au voisinage de son maximum (voir *e.g.* Hofstadter 1995).

²⁹ Ainsi l'expérience de la boussole affolée qui manifeste une expérience sensible du chaos ! Le chaos physique se déroule sous nos yeux ; une description est donnée dans Bois (2002a).

³⁰ La non-intégrabilité démontre au passage les limites radicales du réductionnisme scientifique.

4. Une classification simple des mouvements

Il apparaît que l'immense multitude des mouvements macroscopiques de la nature et par suite des systèmes apparentés, peut, en première instance, se décomposer en deux grandes familles essentielles que nous avons synthétisées dans des travaux précédents (*e.g.* Bois 2001a, 2002a, 2006). La simplicité de ce découpage, à savoir les mouvements réguliers et irréguliers, dérive d'une compréhension qualitative du chaos dynamique. Nous en résumons les grands traits nécessaires à notre propos.

Les mouvements réguliers. Par nature, les mouvements réguliers sont *stables* ou *instables* de manière permanente. S'il s'agit d'un système conservatif, la caractéristique de stabilité ou d'instabilité demeure à jamais. Dans l'espace des phases d'un tel système, les solutions se manifestent autour de points fixes, de nature elliptique ou hyperbolique; ce qui signifie respectivement des équilibres stables ou instables.³¹ Les solutions de tels mouvements réguliers construisent des courbes régulières dans un diagramme des phases. Autour des points fixes stables, traduisant l'existence de solutions périodiques, oscillent des *solutions quasi-périodiques* dites de « libration ». Ces courbes se referment sur elles-mêmes sous forme « d'îles de libration » souvent imbriquées les unes dans les autres. A contrario, d'autres courbes, restant résolument ouvertes, s'approchent des points fixes instables d'où elles divergent ensuite. Ces courbes régulières ouvertes sont dites de « circulation ».

Les librations de la Lune traduisent le type même de mouvements réguliers stables, aux solutions quasi-périodiques.³² La notion de *libration*, dans l'espace commun dit de configuration, exprime en effet un mouvement de balancements réguliers d'un astre autour d'une configuration d'équilibre stable (manifestée par une résonance) et par extension autour d'un mouvement moyen séculaire.³³

³¹ Voir, à titre exemplaire, le diagramme des phases du mouvement du pendule.

³² Les librations de la Lune résultent d'un système dynamique non-intégrable mais conservant des propriétés de quasi-périodicité. Le lecteur pourra se reporter à Bois (2000a) pour un point actualisé sur les librations lunaires (« apparentes » et « physiques »).

³³ Bois (1995).

Les petites toupies à bascules sont un exemple de mouvements réguliers instables. Après une phase de rotation classique, la toupie effectue un « flip-flop ». Elle se retourne, son pôle Nord passant au Sud, et continue de tourner sur elle-même puis chute faute d'énergie suffisante, celle-ci s'étant dissipée par le point de pivot. Ayant reproduit ce phénomène par simulation numérique à énergie totale constante, je puis dire qu'il se produit une cascade *régulière* de bascules rapides, tour à tour inverse l'une de l'autre, entrecoupant des phases de rotation simple de la toupie. Il ne s'agit plus de librations mais de *bascules* qui s'expliquent par une hiérarchie particulière de la figure dynamique de la toupie (Bois 1995). Ce phénomène est théoriquement plausible dans le cas de la rotation des noyaux de comètes.³⁴

Les mouvements irréguliers. Par nature, les mouvements irréguliers ne procèdent pas d'un mode qualitatif unique, stable ou instable, indéfiniment. Lorsque dominant les rapports de l'instabilité et de « l'hyperbolicité », les mouvements irréguliers résultants sont dits *chaotiques*. Le comportement irrégulier est dit chaotique à la fois dans les systèmes conservatifs et dissipatifs. Cependant, tandis que le vocable d'« attracteurs étranges » est spécifique de la description du chaos issu des systèmes dissipatifs, celui de « mouvements chaotiques » suffit à l'usage des systèmes conservatifs.³⁵

Par sa rotation chaotique, Hyperion, modeste satellite de Saturne, est entré à jamais dans l'histoire. Son mouvement de rotation est en effet le siège de *bascules chaotiques* : Hyperion effectue, suivant une variété d'orientation, des bascules franches et complètes de son attitude spatiale et, de plus, la succession de ces dernières n'est plus régulière, au sens où elle n'est pas même quasi-périodique, ni de ce fait prédictible. L'instabilité est majeure, éventuellement entrecoupée de passages stables éphémères...

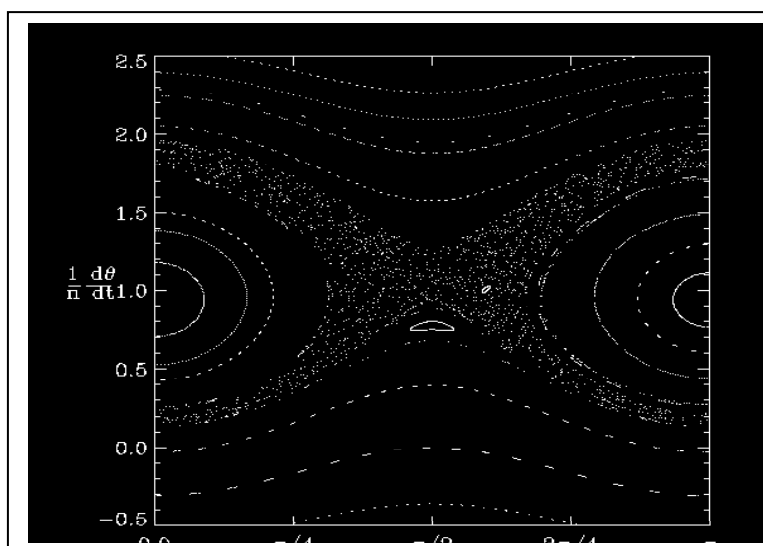
5. Illustration

³⁴ Nous avons conjecturé les comètes « à bascules » et justifié leur faisabilité de principe (voir *e.g.* Boudin *et al.* (1994) ainsi que Bois (1995) dans le cadre d'une classification générale des états de rotation des corps célestes solides.

³⁵ Ces phénomènes ont en commun un « exposant de Lyapunov » positif *grand* et la divergence exponentielle correspondante des solutions voisines.

Deux sections de Poincaré de la rotation de deux corps célestes, dont Hyperion, vont à présent nous servir à illustrer ces deux catégories de mouvements, réguliers *versus* chaotiques. La causalité physique du chaos s'approche dans ce contraste. Par l'analyse de ces coupes, nous trouvons en outre le rôle des résonances dans les systèmes non-linéaires à plusieurs degrés de liberté. Elles structurent le problème en zones dynamiquement différentes (régularité et chaos). Le chaos local résultant s'avère presque toujours présent au voisinage d'une résonance. Les résonances sont de la sorte responsable dans les systèmes non-linéaires à plusieurs degrés de liberté du comportement chaotique « local » (*i.e.* au voisinage des résonances³⁶).

En Figure 4, la première de ces deux sections traduit les états possibles (passé, présent et futur) de la rotation de Phobos, l'un des deux satellites de Mars. Phobos est en rotation synchrone autour de Mars comme la Lune l'est autour de la Terre (*i.e.* en résonance spin-orbite 1:1). Ce fait est visible au centre de la Figure sous forme d'une île de libration (géométrique) qui traduit bien la rotation présente de Phobos faite de librations (physiques) autour de sa position d'équilibre (*i.e.* comme la Lune). Précisément au voisinage de cette résonance, l'on observe une bande chaotique conséquente qui pourrait exprimer une phase de rotation chaotique de Phobos dans son passé, avant sa capture en résonance...



³⁶ Plus exactement, le chaos apparaît enserré aux croisements de structures différentes et se diffuse à partir de points fixes hyperboliques (équilibres instables). En revanche, exactement aux points fixes elliptiques (équilibres stables), existent des solutions périodiques et autour d'eux des solutions quasi-périodiques.

Fig. 4. Surface de section des états possibles de rotation de Phobos (satellite de Mars). Le principe du calcul du *couplage spin-orbite* est identique pour les Figures 4 et 5. L'on considère une rotation du satellite autour d'un seul axe, le plus petit axe d'inertie du corps, perpendiculaire au plan orbital. Dans ce plan, l'orientation spatiale du corps est repérée par l'angle θ , pris entre l'axe de plus grande inertie du corps et une ligne de référence (la ligne joignant la planète mère et le péricentre de l'orbite du satellite). Les états synchrones, sur ces sections, à $\theta = 0$ et $\theta = \pi$, diffèrent simplement par le fait que le satellite présente des faces opposées à la planète mère. Le taux de variation de l'orientation, $(1/n)(d\theta/dt)$ où n est le moyen mouvement du satellite sur son orbite, est tracé par rapport à son orientation spatiale θ , ceci à chaque passage au péricentre orbital.

La Figure 5 présente une section de Poincaré historiquement exceptionnelle. Il s'agit de la surface de section des états possibles de la rotation d'Hyperion. En 1984, les auteurs de ce calcul, Wisdom, Peale et Mignard,³⁷ trouvèrent une zone chaotique singulièrement large entourant l'état spin-orbite d'Hyperion. Comme l'on peut le constater, cette zone s'étend d'un état sans rotation, dans un repère inertiel, à un taux de rotation d'environ 2.5 fois le mouvement orbital angulaire moyen ! Fort d'une telle étendue de la zone chaotique dans l'espace des phases, les auteurs pouvaient conjecturer à bon droit qu'il était plus probable qu'Hyperion soit dans une rotation chaotique plutôt que régulière. Or, en 1989, les observations de Klavetter sont venues confirmer cette prédiction.³⁸ Aucune période manifeste n'est ressortie de leur recherche en fréquences dans les observations de la rotation d'Hyperion. Dès lors, Hyperion devint le premier cas de comportement chaotique *permanent* et *rapide* dans le Système solaire.

³⁷ Wisdom *et al.* (1984).

³⁸ Klavetter (1989).

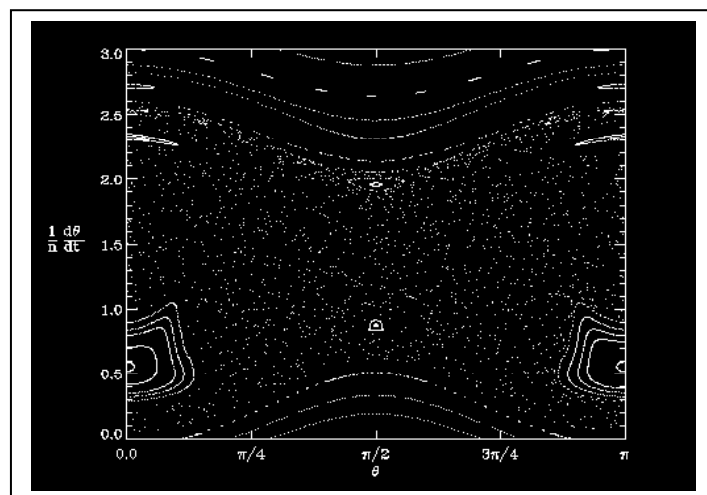


Fig. 5. Surface de section des états possibles de rotation d'Hyperion (satellite de Saturne). La zone chaotique, entourant l'état spin-orbite d'Hyperion, s'étend d'un état sans rotation dans un repère inertiel à un taux de rotation d'environ 2.5 fois le mouvement orbital angulaire moyen.

Les surfaces de section donnent une *vision globale* du spectre des mouvements possibles issus de l'intégration numérique d'un même jeu d'équations amorcées par un balayage suivi de conditions initiales prélevées dans un large intervalle de positions-vitesses (espace des phases). Cette technique appliquée aux mouvements de rotation de Phobos et d'Hyperion offre le déploiement des modes possibles de rotation (au passé, présent et futur). Le mode actuel correspond nécessairement à l'un de ces états de rotation, visibles sur les coupes. Dans le cas de Phobos, la zone chaotique est assez conséquente, mais ses zones régulières le sont davantage. Et de fait, Phobos est actuellement en état de *libration*. Hyperion, en revanche, effectue dans sa rotation d'attitude instable des *bascules chaotiques* en conséquence de sa forme très irrégulière, de son excentricité orbitale grande et d'une lente évolution par friction de marées vers un état de rotation synchrone.³⁹

³⁹ Les paramètres caractérisant l'asphéricité de la figure dynamique d'Hyperion et l'excentricité de son orbite sont tous deux très grands et très supérieurs à ceux de Phobos.

En concluant ces illustrations du chaos, je voudrais faire observer que les *p* comportements dynamiques possibles ne sont pas de *simples possibles de la raison* car ils sont liés logiquement par la loi du système d'équations. Autrement dit, cette fabuleuse approche globale des systèmes nous met en présence des comportements *en acte* et *en puissance* de la portion de nature représentée par le système. Mieux, la compréhension d'un mouvement donné s'éclaire puissamment dans le panorama des mouvements en puissance qui donnent accès à ses propriétés structurelles et aux processus d'évolution. La réalité observée, on comprend sa dynamique en acte dans le déploiement d'un panorama rationnel des états dynamiques en puissance.

6. Classification des niveaux de signification du chaos

Les concepts du chaos et ses phénomènes associés traversent aujourd'hui une large variété de champs scientifiques. La mécanique céleste, l'hydrodynamique, la physique expérimentale, ou encore la chimie, ont notamment rencontré et développé la phénoménologie du chaos. Ne serait-ce qu'en restant sur le terrain des sciences de la nature, le chaos s'avère un objet d'étude éminemment pluridisciplinaire. Que ce soit par l'obtention de propriétés mathématiques ou de signatures issues d'expériences très concrètes, la phénoménologie du chaos croise de surcroît de multiples approches différentes à travers diverses spécialités scientifiques. En outre, de cet aspect pluridisciplinaire à ses invitations transdisciplinaires « tout azimuth », il s'est peut-être aussi produit comme un « emballement » dans une variété de secteurs connexes et leurs applications. En définitive, il apparaît que la grande diversité des discours, techniques, expériences et approches qui conduisent à l'affirmation du « chaos » n'aide pas nécessairement à se forger une idée claire de sa signification épistémologique. Aussi, derrière ces multiples « chaos », est-ce bien « le même » phénomène objectivable annoncé par une limite de prédictibilité, la valeur d'un indicateur, l'interprétation d'une structure, ou encore l'assurance de la non-intégrabilité ? Une limite de prédictibilité signifie-t-elle toujours l'annonce d'une « imprévisibilité » naturelle ? N'y a-t-il pas des cas où la limite de prédictibilité s'arrête à une conjoncture pratique ? En pratique justement, dispose-t-on d'un système d'équations analysables ou bien de séries temporelles sans accès à ce qui les produit ? En plus de l'annonce ou de l'affirmation

d'une limite de prédictibilité, voire de la déclaration de chaoticité, la cause du chaos est-elle identifiée, ou bien sommes-nous réduits à conjecturer sur ses « symptômes » ?

Face à ces difficultés légitimes de compréhension satisfaisante des arcanes du chaos, il nous est apparu nécessaire de stratifier et d'ordonner la phénoménologie du chaos en différents niveaux de signification épistémologique. Ceux-ci s'avèrent en particulier dûment articulés à la stricte portée des protocoles de mise en œuvre du chaos.⁴⁰ En outre, si un comportement stable renvoie à une notion d'équilibre signée d'oscillations autour de celui-ci, si un comportement instable réfère à une notion de divergence sans repasser à l'équilibre, quelle signature significative ou exclusive retenir pour un comportement chaotique ? Sont ainsi requis trois niveaux progressifs de signification et par suite de « sens physique » de la profondeur du chaos :

- 1er niveau : Il s'agit de la simple affirmation, normalement conséquente d'un calcul, de l'existence d'une *limite de prédictibilité déterministe*. Cette limite de prédictibilité, obtenue assez généralement dans les systèmes conservatifs et dissipatifs par le calcul du *temps de Lyapunov*,⁴¹ n'indique pas nécessairement qu'il s'agit de l'horizon au-delà duquel l'objet d'étude présente immédiatement un comportement physiquement chaotique. D'une part, le temps de diffusion ou de fuite est supérieur ou égal au temps de Lyapunov, c'est-à-dire que la connaissance de la limite de prédictibilité ne suffit pas à dire si le chaos réel s'effectue juste au-delà. D'autre part, l'obtention du temps de Lyapunov est « modèle-dépendant ». Sa valeur dépend notamment du nombre de résonances injectées dans le système. A ce niveau, l'imprédictibilité n'implique donc pas l'imprévisibilité.

- 2e niveau : Le comportement chaotique est dûment établi selon une *propriété interne* au système dynamique (e.g. la non quasi-périodicité). Autrement dit, la théorie assure un *comportement imprévisible* au-delà de la limite de prédictibilité déterministe. L'adjectif « imprévisible » est utilisé ici non pour signifier un aspect aléatoire, mais pour souligner la capacité de l'objet à « traverser » tous les comportements possibles

⁴⁰ Bois (1997, 2001a).

⁴¹ Lorsque la croissance de la divergence, entre des trajectoires issues de points aussi voisins qu'on le veut, s'effectue de manière exponentielle au cours du temps, la distance entre ces trajectoires croît donc proportionnellement à une fonction $\exp(t/T)$ où $1/T$ est l'exposant de Lyapunov et T le temps de Lyapunov.

permis par le système. Il peut y avoir une succession de phases stables et instables, mais à l'avantage de l'instabilité, ceci de manière non-périodique et sans que les phases de même nature se ressemblent. Mais l'on ne dispose pas d'observations pour confirmer ou infirmer ce genre de prédictions, liées comme dans tous les cas de prédictions classiques, aux critères de validité des modèles. A ce niveau, le rapport de l'imprévisibilité dynamique intrinsèque au système à l'imprévisibilité réelle extrinsèque est lié au degré de confiance attribué au système de représentation.

- 3e niveau : La propriété interne est réellement « en acte » dans la « portion de nature » représentée par le système. Le caractère d'imprévisibilité acquis au niveau précédent est non seulement prédit mais vérifié, observé. L'objet d'étude peut repasser à l'équilibre ou non. Il peut connaître de courtes phases stables, le plus souvent éphémères, puis instables (généralement plus longues), le tout globalement sans reproductibilité des phases. Sur une durée conséquente, le comportement dynamique de l'objet se caractérise ainsi par son irrégularité au sens où tout paraît possible. Tous les comportements possibles s'expérimentent à la faveur d'une instabilité entrecoupée de passages stables éphémères. A ce troisième niveau, l'on a l'assurance que le chaos n'est ni simplement pratique, ni modèle-dépendant. Il s'agit bien d'une *imprévisibilité naturelle*. Le système constitue dès lors un vrai modèle de représentation du comportement physique chaotique en question.

L'on trouvera naturellement dans la littérature plusieurs candidatures au *chaos troisième niveau* dans le Système solaire,⁴² mais selon notre classification, le cas d'Hyperion avec ses bascules chaotiques appartient sûrement au troisième niveau, celui du *chaos physique observé*. Au-delà de la limite de prédictibilité, l'assurance est acquise d'un comportement dynamique particulier où en effet l'imprédictibilité se manifeste *comme* une imprévisibilité. Hyperion peut occuper toutes sortes de positions spatiales possibles selon une grande variété de comportements. Il peut ainsi effectuer des « flip-flops », se stabiliser un court moment, puis repartir en rotation rapide, puis se stabiliser à nouveau, dans une autre configuration spatiale, puis basculer à nouveau sans que les bascules soient ni de durées équivalentes, ni spatialement analogues. La non-reproductibilité des différentes phases annule la prédictibilité.

⁴² Voir Wisdom (1987), également Laskar et Froeschlé (1991).

7. Discussion

« Là réside la signification du chaos, cette impossibilité pratique de calculer l'évolution de systèmes déterministes. » Cette juste synthèse de nature épistémologique que l'on doit à Ruelle (1995) cadre avec la définition que nous avons donné du chaos de premier niveau. Cependant, que la signification du chaos soit réductible à une contingence d'ordre pratique, c'est annuler sa phénoménologie immanente et par là, selon l'expression fameuse de Wigner, cette « irraisonnable efficacité des mathématiques ».⁴³ Les deuxième et troisième niveaux de signification que nous avons formulés plus haut contiennent implicitement ou explicitement le premier, mais en même temps en disent davantage. En effet, la limite de prédictibilité peut être pratique, « modèle-dépendant », ou bien annoncer une imprévisibilité naturelle. Aussi, que la non-prédictibilité cache ou annonce un chaos ne répond pas du statut de ce dernier en regard des épreuves ordinaires de tout objet de science, schématiquement : la pratique, la théorie et l'observation – ou encore l'ordinateur, les mathématiques appliquées et l'expérimentation. Ces trois démarches ne sont pas à homologuer aux trois niveaux de signification du chaos, mais elles se conjuguent pour le statut de celui-ci. « *L'impossibilité pratique de calculer* », autrement dit l'existence de limitations aux prévisions, renvoie de ce fait aux propriétés mathématiques des équations qui sont intégrées : à l'essence mathématique du chaos correspond une *manifestation en pratique*. Mais ces équations peuvent approcher une réalité et ce chaos signifier quelque chose de naturel, d'immanent.

Pour un même système d'équations différentielles, un seul jeu de conditions initiales donne une seule trajectoire. La variation des conditions initiales, c'est-à-dire le balayage de la multitude de valeurs et de combinaisons possibles, donne un faisceau de trajectoires. Une telle étude du mouvement dans l'espace des phases donne la variété des comportements possibles dont le comportement chaotique. Aussi l'étude de l'évolution d'un système dynamique s'effectue globalement au travers du déploiement de ses évolutions possibles. Ce déploiement permet de dire la possibilité de telle ou telle

⁴³ Wigner (1960).

occurrence. L'ignorance de conditions initiales absolues, primordiales ou simplement exactes vis-à-vis de la modélisation dynamique de telle réalité est contrebalancée par le balayage suivi de ces conditions initiales dans l'espace des phases. Le chaos déterministe de deuxième et troisième niveau signifie qu'un mouvement chaotique peut explorer une large portion de l'espace des mouvements. De ce fait, la connaissance de ce que signifie en profondeur la non-prédictibilité donne droit « à l'ignorance » sur la prédictibilité quantitative de positions ! La nuance à comprendre est la suivante. La prédictibilité classique – de nature quantitative – n'est pas perdue faute de connaissance, mais elle n'a plus de sens dans les régimes chaotiques ! Ce qui est perdu, en fait, c'est son caractère absolu de prédiction quantitative comme critère de scientificité. Ce qui est gagné, c'est une prédictibilité « qualitative » sur la nature des régimes possibles. Le régime chaotique lui-même, en tant que régime possible, est prédictible !

Autrement dit, la non-prédictibilité quantitative signifie en profondeur une richesse dynamique qu'il convient de « dérouler » pour la comprendre. C'est à nouveau pourquoi l'étude de l'évolution d'un système dynamique doit s'effectuer globalement au travers de ses évolutions possibles. Or, cette puissance théorique de déployer les possibilités dynamiques d'un système traduit en fait les possibilités naturelles de « transits » et de « traversées » d'un objet dans son propre espace des phases. Toutes les traversées ne sont pas possibles; certaines le sont d'autres non, d'où cette possibilité de prédire des occurrences et des contraintes. Par conséquent, pour tout système dynamique donné, il existe des *contraintes dynamiques internes*. Dès lors, il s'agit de progresser dans cette connaissance du rapport « possibilités – contraintes »; c'est là un acte de science.

Par exemple, dans le cas de l'évolution de la rotation d'Hyperion, l'analyse de la surface de section de la Figure 5 permet de prédire les grandes lignes suivantes (en se plaçant avant le résultat des observations d'Hyperion). Étant donné que les processus dissipatifs liés aux marées auront tendance à entraîner la rotation d'Hyperion vers un état de synchronicité stable, Hyperion devra nécessairement entrer dans la zone de chaos de son espace des phases, celle-ci étant très large et contenant les principaux rapports de résonance spin-orbite. L'attitude spatiale d'Hyperion deviendra alors

instable et commenceront les bascules dans toutes les orientations possibles. Qu'il y ait à partir de cet état chaotique une capture dans les états de résonance spin-orbite 1:1 (état synchrone) ou 1:2 est impossible puisqu'ils sont également d'attitude instable. En revanche, une capture dans l'état de résonance 2:1 d'attitude stable est théoriquement possible, mais improbable en raison de la petitesse de cet îlot dans l'espace des phases. L'évolution vers l'état de résonance 3:2 n'est pas à envisager vu qu'il n'existe pas sur la section de Poincaré; etc. De ces considérations, les auteurs de l'article (Wisdom *et al.* 1984) concluaient qu'Hyperion devait être trouvé en rotation chaotique. Cette prédiction qualitative fut confirmée, quelques années plus tard, par les observations.

8. Conclusion

8.1. *Le chaos exploratoire*

Une limite de prédictibilité peut être pratique, « modèle-dépendant » ou annoncer une imprévisibilité naturelle. Nous avons distingué trois degrés de signification du chaos déterministe auxquels renvoient les protocoles de sa mise en œuvre. (1) Un calcul « modèle-dépendant » conduisant à la seule affirmation d'une limite de prédiction, définit un premier niveau. (2) Un comportement dynamiquement chaotique, dûment établi selon une propriété interne au système dynamique, définit le second niveau. (3) Dans le troisième niveau, cette propriété interne est réellement en acte dans le « morceau » de nature représenté par le système.

Le chaos dynamique signifie ainsi qu'un mouvement chaotique peut explorer une large portion de l'espace des mouvements, ce qui correspond à un principe d'exploration du mouvement en puissance (deuxième niveau), lequel manifeste un facteur naturel de *déploiement des possibilités dynamiques de la nature* (troisième niveau). L'on comprend que le chaos contribue à l'émergence de configurations dynamiques particulières.

Dans le domaine macroscopique, le chaos dynamique n'est ni le hasard, ni le n'importe quoi, il est cohérent, il est déterministe et, à son niveau le plus fort, signifie

l'existence, sur de longues périodes de temps, d'un *processus exploratoire* du mouvement en puissance, lequel traduit une *réalité possible*. En contribuant ainsi à l'émergence de structures nouvelles, le chaos joue un rôle indéniable dans la morpho-structuration dynamique du cosmos. Il est générique et universel.

8.2. Le « syndrome » du chaos

La grande « vogue » du chaos ne s'est pas développée sans répandre une certaine pathologie associée. Ce que j'appelle le « syndrome du chaos » est tel qu'un phénomène peut présenter les symptômes du chaos sans pour autant procéder de sa pathologie vraiment spécifique. Aussi, ce syndrome prend sa source dans le fait d'identifier imprudemment les *indicateurs* du chaos avec les *preuves* du chaos. Dans ces conditions, l'on comprendra comment d'une indication généreuse du chaos, l'on se retrouve avec une sorte de confusion épistémologique de sa signification, ou encore, comment se contentant des apparences du chaos, l'on passe à sa prolifération. Les symptômes, pour très caractéristiques qu'ils soient, ne sont que des effets, non pas des causes. Or, les effets n'épuisent jamais l'être et l'essence de ce qui les produit. Il n'y a de science, en effet, que par la connaissance certaine des causes.

Au syndrome pour ainsi dire constitutif de la pathologie chaotique, s'ajoute une curiosité externe : c'est *l'intention attractive du chaos*. L'intention du chaos, c'est ce que l'on voudrait faire dire au chaos, c'est-à-dire les raisons plus ou moins cachées d'un chaos non plus phénomène, mais érigé en vecteur d'idéologie plus ou moins philosophique. Ici, ce n'est plus le chaos qui instruit, mais l'idée du chaos qui attire et séduit. Nous le disions en introduction, aux notions classiques de *réduction*, *maîtrise*, *prédictibilité*, *exhaustivité*... se substituent des notions et des concepts balayant aujourd'hui le champ des sciences comme *irréductibilité*, *incertitude*, *imprédictibilité*, *incomplétude*, *indécidabilité*... La similitude de cohérence de ces nouvelles notions, munies d'un même préfixe, plaide avec force en faveur d'un nouveau paradigme instruisant les chemins d'une nouvelle philosophie de la nature. Mais aussi pour mieux asseoir cette idée, l'on voudrait voir la chute du déterminisme et proclamer dans cette même veine, l'indéterminisme ! Et bien non. Du moins pas avec le chaos.

8.3. *Le hasard : battu par chaos*

Dans cette même veine également, l'on voudrait de-ci de-là que le chaos alimente la thèse du hasard érigé en système explicatif. Or bien *a contrario*, le chaos se présente plutôt comme un territoire d'intelligibilité conquis à l'empire du hasard ! Il est un article au titre somptueux qui le manifeste avec brio : « *Le hasard : battu par chaos !* »⁴⁴ Il serait d'un fameux impact philosophique de considérer ce fait dans les domaines des sciences de la vie. Le chaos, tout comme le hasard, exploite le possible, rien que le possible, jamais l'impossible ! En l'occurrence, le chaos déploie et explore les possibilités dynamiques de la nature. Dès lors, le mouvement étant nécessaire à l'évolution, le chaos, facteur exploratoire du mouvement en puissance, à l'intelligibilité cohérente, à la phénoménologie universelle, est appelé à être intégré comme un agent générique de l'évolution, opératoire et efficace.

L'apport subtil de la science du chaos en Philosophie de la nature est que le dualisme *prédictibilité – imprédictibilité* ne traduit pas l'alternative *déterminisme – indéterminisme*. L'épistémologie du chaos dynamique ouvre, en rompant avec la vieille alternative « hasard ou nécessité », la voie d'une nouvelle philosophie de la nature, à base de déterminisme « affranchi » de la contrainte de prédictibilité. Les rapports du déterminisme naturel et de la causalité physique s'affinent au profit de la compréhension de l'immanence. La croissance avérée de la complexité ne serait ni dans le fruit d'une interminable cascade de hasards purs mais propices, ni dans celui d'une nécessité déterminée mais hautement téléguidée. La nature possède en elle-même les principes de génération de situations nouvelles, « d'attraction » à la complexité et de catalyse de la croissance de celle-ci.⁴⁵

Epilogue

Considérant l'unicité de notre Univers à travers les déterminations qui le révèlent en ce qui l'est, observable, mesurable, conceptualisable, et la fiction des

⁴⁴ *Science Frontières* 30, pp. 18-23. Article de Michel Bounias qui fut professeur de Toxicologie et de Biomathématiques à l'Université d'Avignon.

⁴⁵ Bois (2002a).

univers multiples qui n'existent que dans l'intellect, il s'avère légitime de subordonner son existence réelle à son être.⁴⁶ En conséquence, ces principes qui viennent d'être énoncés ne sauraient être cause d'eux-mêmes et restent subordonnés à l'existence même de la Nature et de sa *subsistance dans l'être*. Ils ne sauraient donc signifier quelque argument d'autosuffisance ontologique de l'Univers en tant qu'être et, par conséquent, de l'univers de la Nature. Autrement dit, de l'autonomie de la nature, de son immanence pleinement « intra-physique », l'on ne saurait déduire quelque naturalisme physicaliste ou « émergentiste », animiste ou panthéiste, même si – une fois n'est pas coutume – j'ai doté ici dame Nature d'une majuscule...

Références bibliographiques

- Arnold, V. I., 1963, "Proof of A. N. Kolmogorov's theorem on the preservation of quasiperiodic motions under small perturbations of the Hamiltonian", *Russ. Math. Surv.* **18**, pp. 9-36.
- Bois, E., 1995, "Proposed terminology for a general classification of rotational swing motions of the celestial solid bodies", *Astronomy & Astrophysics* **296**, pp. 850-857.
- Bois, E., 1997, "Le chaos, sens, contresens et cohérence", 1st Astrophysical CNRS School of Oleron, Saint-Pierre d'Oléron, 1996 May 20-24, in: *Chaos and Fractals in Solar Activity*, J.P. Rozelot (Ed.), pp. 8-24.
- Bois, E., 1999, "Le chaos : du phénomène dynamique au phénomène de mode", invited lecture, La Sorbonne, Paris, May 15 1999, in: *Ethique et Epistémologie autour du livre "Impostures Intellectuelles" de Sokal et Bricmont*, Collection *Epistémologie et Philosophie des Sciences*, Direction A. Krémer-Marietti (Ed.), L'Harmattan (2001), pp. 243-252.
- Bois, E., 2000a, "Connaissance de la libration lunaire à l'ère de la télémétrie laser-Lune", *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences (Paris)*, tome **1**, Série **IV**, pp. 809-823.
- Bois, E., 2000b, "La causalité étendue", in: *Science et philosophie de la Nature: Un nouveau dialogue*, Ouvrage collectif international, Direction L. Boi (Ed.), Peter Lang – Editions Scientifiques Européennes, pp. 199-219.
- Bois, E., 2001a, "The three levels of significance in dynamical chaos", *Revue des Questions Scientifiques* **172**, pp. 105-116.
- Bois, E., 2001b, "De quelques enjeux philosophiques du phénomène chaos", invited lecture, Groupe de travail de l'Académie des Sciences Morales et Politiques, Direction B. d'Espagnat (Ed.), in: *Implications philosophiques de la science contemporaine*, Tome 1: *Le chaos, le temps, le principe anthropique*, PUF, pp. 31-34.
- Bois, E., 2001c, "Eléments de causalité étendue", invited lecture, Facultés Universitaires Notre Dame de la Paix, Dept. Sciences-Philosophies-Sociétés, Namur, Belgium, May 23 2001.
- Bois, E., 2002a, *L'Univers sans repos ou l'essence première du mouvement*, Peter Lang – Editions Scientifiques Européennes, Collection *Philosophia Naturalis et Geometricalis* **1**, 237 pages.
- Bois, E., 2002b, "Origine et commencement de l'Univers : d'une intime confusion à un maillon métaphysique", *Revue des Questions Scientifiques* **173**, 59-72.

⁴⁶ Bois (2002a, 2002b).

- Bois, E., 2003a, "Dynamical chaos : factor of deployment and self-exploration of the dynamical possibilities of Nature", invited lecture, International conference : *Une nouvelle philosophie de la nature aujourd'hui : les apports des mathématiques, de la physique et de la biologie*, J.-M. Alimi, L. Boi, J. Kouneiher, and D. Lambert (Eds.), EHESS, Paris, March 26-28 2003.
- Bois, E., 2003b, "Le statut du temps dans les systèmes dynamiques", invited lecture, International conference : *Le temps multiple : de la physique et la biologie à la psychologie et l'histoire*, Supervision L. Boi, April 30 2003, CAMS-EHESS, Paris.
- Bois, E., 2006, "Dynamical chaos and the dynamics of nature", in : *Symétries, brisures de symétries et complexité en mathématiques, physique et biologie – Essais de philosophie naturelle*, Ouvrage collectif international, Direction L. Boi (Ed.), Peter Lang, *Philosophia Naturalis et Geometricalis* 5, pp. 53-94.
- Bois, E., and Girard, J.-F., 1999, "Impact of the quadrupole moment of the Sun on the Dynamics of the Earth-Moon System", *Celestial Mechanics & Dynamical Astronomy* 73, pp. 329-338.
- Bois, E., and Rambaux, N., 2007, "On the oscillations in Mercury's obliquity", *Icarus* 192, pp. 308-317, DOI : 10.1016/j.icarus.2007.07.015.
- Bois, E., & Trelut, E., 2006, "Impact of the chrono-geometrical structure of spacetime on causality", *Revue des Questions Scientifiques*, in press.
<http://xxx.lanl.gov/abs/astro-ph/0304520>
- Bois, E., and Vokrouhlicky, D., 1995, "Relativistic Spin Effects in the Earth-Moon System", *Astronomy and Astrophysics* 300, pp. 559-567.
- Bois, E., Kiseleva-Eggleton, L., Rambaux, N., & Pilat-Lohinger, E., 2003, "Conditions of Dynamical Stability for the HD 160691 Planetary System", *Astrophysical Journal* 598, pp. 1312-1320.
<http://arXiv.org/abs/astro-ph/0301528>
- Boudin, F., Oberti, P., Bois, E., 1994, "Gravitational Model of Comet Nucleus Rotation", *Annales Geophysicae* 12, Part III, Space & Planetary Sciences, C666.
- Dvorak, R., Pilat-Lohinger, E., Bois, E., Funk, B., Freistetter, F., & Kiseleva-Eggleton L., 2004, "Planets in double stars: the Gamma Cephei System", *Revista Mexicana de Astronomia y Astrofisica* 21, pp. 222-226.
- Espinoza, M., 2006, *Théorie du déterminisme causal*, L'Harmattan, Collection Ouverture Philosophique, 227 pages.
- Gayon, J., & Bois, E., 2008a, "Are retrograde resonances possible in multi-planet systems?", *Astronomy and Astrophysics* 482, pp. 665-672.
- Gayon, J., & Bois, E., 2008b, "Retrograde resonances in compact multi-planetary systems: a feasible stabilizing mechanism", in : *Exoplanets: Detection, Formation and Dynamics*, J.S. Sun, S. Ferraz-Mello, & J.L. Zhou (Eds), Cambridge University Press, pp. 511-516.
- Gayon, J., Bois, E., & Scholl, H., 2009, "Dynamics of planets in retrograde mean motion resonances", *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy* 103, pp. 267-279.
- Goldstein, H., 1964, *Mécanique classique*, Presses Universitaires de France.
- Gozdziewski, K., Bois, E., Maciejewski, A. J., & Kiseleva-Eggleton, L., 2001, "Global Dynamics of Planetary Systems with the MEGNO criterion", *Astronomy and Astrophysics* 378, pp. 569-586.
- Hénon, M., 1969, "Numerical exploration of the restricted problem V. Hill's case: Periodic orbits and their stability", *Astronomy & Astrophysics* 1, pp. 223-238.
- Hofstadter, D., 1995, "L'universalité du chaos", *Pour La Science*, Dossier hors-série: *Le Chaos*, pp. 18-26.
- Hubbard, B. B., et Hubbard, J., 1995, "Loi et ordre dans l'Univers : le théorème KAM", *Pour La Science*, Dossier hors-série: *Le Chaos*, pp. 36-44.

- Kiseleva-Eggleton, L., Bois, E., Rambaux, N., & Dvorak, R., 2002a, "Global Dynamics and Stability Limits for Planetary Systems around HD 12661, HD 38529, HD 37124, and HD 160691", *Astrophysical Journal* **578**, L145-L148.
- Kiseleva-Eggleton, L., Bois, E., Rambaux, N., Dvorak, R., & Rivera, E. J., 2002b, "On the Dynamical State of New Multi-Planet Systems", 201st AAS Meeting, *Bulletin of the American Astronomical and Astrophysical Society* **34**, p. 1144.
- Kiseleva-Eggleton, L., Bois, E., Guiderdoni, B., Dauphole, B., Rambaux, N., Goździewski, K., & Maciejewski, A.J., 2003, "A New Look at the Dynamical Properties of Systems with Multiple Planets", in: *Scientific Frontiers in Research on Extrasolar Planets*, D. Deming & S. Seager (Eds.), *ASP Conference Series* **294**, pp. 193-196.
- Klavetter, J.J., 1989, "Rotation of Hyperion. I. Observations", *The Astronomical Journal* **97**, pp. 570-579.
- Kolmogorov, A. N., 1954, "On conservation of conditionally periodic motions under small perturbations of the Hamiltonian", *Dokl. Akad. Nauk. SSSR* **98**, pp. 527-530.
- Laskar, J., 1989, "A numerical experiment on the chaotic behaviour of the solar system", *Nature* **338**, pp. 237-238.
- Laskar, J., 1990, "The chaotic motion of the solar system – A numerical estimate of the size of the chaotic zones", *Icarus* **88**, pp. 266-291.
- Laskar, J., 1994, "Large Scale Chaos in the Solar System", *Astronomy & Astrophysics* **287**, L9-L12.
- Laskar, J. et Froeschlé, Cl., 1991, "Le chaos dans le système solaire", *La Recherche* **232**, pp. 572-582.
- Lorenz, E., 1963, "Deterministic Nonperiodic Flow", *Journal of the Atmospheric Sciences* **20**, pp. 130-141.
- Morbidelli, A., 2002, *Modern celestial mechanics : aspects of solar system dynamics*, London : Taylor & Francis.
- Moser, J., 1962, "On invariant curves of area-preserving mappings of an annulus", *Nachr. Akad. Wiss. Gottingen Math. Phys. Kl.* **2**, pp. 1-20.
- Poincaré, H., 1892 (vol. I), 1893 (vol. II), 1899 (vol. III), *Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste*, Gauthier-Villars, Paris.
- Ruelle, D., 1995, "Où le chaos intervient-il ?", *Pour La Science*, Dossier hors-série : *Le Chaos*, pp. 6-13.
- Szebehely, V., 1991, "Chaos, Stability and Predictability in Newtonian Dynamics", in: *Predictability, Stability, and Chaos in N-Body Dynamical Systems*, A.E. Roy (Ed.), ASI B272, Plenum Press, New York, pp. 63-71.
- Varadi, F., Ghil, M., and Kaula, W. M., 1999, "Jupiter, Saturn, and the Edge of Chaos", *Icarus* **139**, pp. 286-294.
- Wigner, E. P., 1960, "The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Natural Science", *Communications on Pure and Applied Mathematics* **XIII**, pp. 1-14.
- Wisdom, J., 1987, "Urey Prize Lecture : Chaotic Dynamics in the Solar System", *Icarus* **72**, pp. 241-275.
- Wisdom, J., Peale, S.J. and Mignard, F., 1984, "The chaotic rotation of Hyperion", *Icarus* **58**, pp. 137-152.