Lenguaje e intuición espacial[1]

Fernando-M. Pérez Herranz

Jacques-Alain Miller: ... *«Notre langage est une biologie.»*

Rene Thom: - *En fin, une mélange d'algébre et de biologie.*

"Se *si tiene contó del fatto che il problema posto clall'implicazione reciproca fra la* lingua e l'intuizione spaziale é *uno dei piú antichi problemi filosofici, appare di estremo interesse capire perché e come la «geometrie» associate all'opposizione lócale/globale possano sfociare in problemi di semántica e di grammatica".*
Jean Petitot.

PRÓLOGO

Los pitagóricos legaron al pensamiento humano una regla de racionalidad -la regla matemática- que ha dado lugar a las cuestiones más intrincadas de la Ciencia y la Filosofía. Entre ellas hay una que nos interesa especialmente: ¿es posible, cómo y desde qué presupuestos, aplicar con sentido los Lenguajes Formales a los Lenguajes Naturales? La Lógica Moderna, que conceptualizó Frege y divulgaron Russell y Whitehead a principios de este siglo XX a punto de concluir, fue recibida bajo el signo de una interrogación maximalista: ¿sería un Lenguaje Formal lo suficientemente poderoso como para ayudar a resolver los problemas filosóficos que se formulan habitualmente en Lenguaje Natural? ¿Sería posible zanjar nuestras disputas únicamente dándose a calcular, como quería Leibniz? Muchos pensadores tildaron esta pretensión de desmesurada y de temeraria, incluso de ridícula. Sin embargo, y por razones concretas, históricas, la Lógica pudo ser recibida de manera más sorprendente aun si cabe: ¿sería capaz de dilucidar problemas políticos de legitimación? El recuerdo de aquel durísimo debate ideológico en el que se identificaba la

1 Instituto de Cultura «Juan Gil-Albert»
Generalitat Valenciana, Conselleria d'Educació i Ciencia
ISBN: 84-7784-260-4
Depósito legal: A-1 50-1997

Lógica Analítica con la defensa del Capitalismo, y la Lógica Dialéctica con la defensa del Comunismo, es síntoma de que la Lógica no se entendía como algo neutral o inocente. Tampoco lo fue entre nosotros, aunque aquí tomó su particular sesgo, que ya es posible contemplar con serenidad desde la distancia. Porque la Lógica jugó un papel beligerante contra las maneras escolásticas de la argumentación, que, desde sus presupuestos ontológicos, gnoseológicos y morales, parecían defender un Régimen que reprimía las libertades culturales, políticas e intelectuales del país. La Lógica fue, dentro de los ámbitos escolar y universitario, un arma más enfrentada a aquella escolástica que atentaba a un mismo tiempo contra "el sentido común, la lógica de los Principia Mathematica, el principio de verificabilidad, la sintaxis, la semántica y la pragmática, el habla corriente, nuestro esquema conceptual y cualquier otra actividad pensante por la que deseemos reemplazarlo", según el mordaz comentario de Javier Muguerza.

Y, mientras se iban suavizando y olvidando estas cuestiones y cada buho o mochuelo anclaba ocupado en encontrar su olivo, la Lógica se estaba transformando en un saber fundamentalmente vinculado al mundo tecnológico de la Computación. Y, en éstas, se consumó lo que hoy llamamos Sociedad Informática, que nos cogió, presumiblemente, «pensando» en otras cosas. Todavía hoy, algunos intelectuales se niegan a ver la TV o a usar un ordenador personal: y eso por principio.

Y, como suele ocurrir con las situaciones a las que se califica de «paradójicas», los escolásticos tenían su pequeña racioncita de razón al atentar contra los Principia Mathematica por echar en falta en ellos lo que hoy llamaríamos cuestiones semánticas. Pero ni el escepticismo ni el criticismo desplegados por la Escolástica eran necesarios contra los formalismos; la resolución del problema ya se había consumado dentro de los marcos internos de la investigación y del desarrollo de la Lógica. Muy pronto se comprendió que suponía demasiada exigencia para cualquier lenguaje su traducibilidad al lenguaje lógico e imposible la demostrabilidad de todos los enunciados verdaderos. El Teorema de Codel ponía las cosas en su sitio: fueron abandonadas las creencias en el método axiomático como una suerte de panacea universal y se inició una serie de valiosísimos intentos de recuperación de la Semántica por parte de los lógicos: La Teoría de Modelos, las Lógicas Intensionales y hasta la Lógica Borrosa se dispusieron y se disponen a la reconstrucción lógica de la Semántica. Más aun: se empieza a comprender la importancia de la conceptualización de los axiomas vinculados al momento *intuitivo* en el que se extraen los conceptos fundamentales del Sistema Formal. Pero el resultado no acaba de ser del todo satisfactorio debido, seguramente, a que en todos estos estudios el componente extensional-distributivo es más poderoso que el intensional-atributivo, lo que los hace parecerse más a los formalismos algebraico-sintácticos que a los conceptuales-semánticos.

Pero el fracaso de la Lógica llegó por donde tenía que llegar: No tanto por falta de Semántica -como hubieran querido los antilógicos-, sino por falta de Economía. La Lógica fracasó en el intento por hacerse con el mercado de los ordenadores, servicio éste que cumplieron y cumplen sobradamente matemáticos e ingenieros. La Lógica hubo de volver donde solía: junto a los Lenguajes Naturales. Ayuda de cámara, clarificadora de oscuridades lingüísticas, sierva del sentido común, *ancilla quotidianae vitae.* Los Lenguajes Naturales, en todo caso, no pueden resistir mucho tiempo sin apelar a la Semántica y, dado que la Lógica viene a identificarse extensionalmente con la Sintaxis, ésta permite que se cuelen de rondón todos los ¡nacionalismos al uso, para gozo de quienes ven en la Filosofía destellos divinos y goces inefables.

Pero la Razón -hecha a toda clase de asaltos- continúa su trabajosa andadura y se esfuerza tanto en plantear cuestiones como en hallar soluciones, siquiera valgan por algún tiempo. Así se creó la Lógica, cuando Aristóteles buscó en la Geometría un modelo, una estructura, con la que enfrentarse al problema socrático de la pregunta por el qué de las cosas: por su Definición. Tras las dos últimas décadas, parece que es posible ya enfrentarse al problema de las limitaciones internas de los Sistemas Axiomáticos a partir de una disciplina, cercana a la Geometría, de la que se ha destacado el elemento intensional-atributivo -en vez del elemento distributivo-extensional que seleccionó Aristóteles-. Este saber de referencia es la Topología.

* * *

Pues bien: lo que pretenden las páginas que siguen es la presentación de este nuevo Lenguaje Formal Topológico de una manera «intuitiva», en el sentido en que se habla de una «Teoría Intuitiva de Conjuntos». Como toda investigación incipiente y ensayística, necesita incorporarse a los saberes normalizados, lo que no suele ser tarea sencilla. Existe ya, sin duda, una bibliografía abundante y riquísima sobre la aplicación de la Topología a la Semántica en artículos esparcidos por revistas francesas, inglesas, alemanas, alguna española, no siempre de fácil acceso. Y, además, como es natural, los artículos se remiten unos a otros, suponiendo muchos conceptos de la teoría, lo que dificulta su comprensión a los no especialistas, que acceden a ellos por vez primera o asistemáticamente o de manera aislada.

El objeto de este trabajo, por tanto, es facilitar la tarea a quienes estén interesados en comprender las líneas más gruesas de la Semántica tratada desde la teoría topológica conocida a través del equívoco nombre de «Teoría de las Catástrofes». Expuesta por Rene Thom en la década de los sesenta, nace de dos teorías más generales: la Teoría de las Singularidades, desarrollada por M. Morse, H. Whitney, S. Sámale, I.V. Arnolcl... y la Teoría de la Bifurcación, investigada por H. Poincaré, A.M. Lyapunov, A.A. Andronov, L.S. Pontriaguin..., que ha sido aplicada tanto a las ciencias físicas como a las biológicas y sociales. Petitot y Wildgen la han aplicado a la Lingüística, y son nuestras referencias principales.

Debo señalar al virtual lector -para evitar cualquier confusión o malentendido-, que hay dos momentos en los que se encontrará con aportaciones cuya responsabilidad conceptual atañe en exclusiva a quien esto escribe:

En primer lugar, he destacado las relaciones entre Lógica y Topología. Se cometería un grave error suponiendo -como querían aquellos escolásticos- que la Lógica ha sido superada, que se puede prescindir de ella, o que ya no hay Lógica. Me parece fundamental establecer un modelo conceptual en el que la Lógica y la Topología manifiesten sus relaciones internas, lo que trato de demostrar en el capítulo 3.

En segundo lugar, el análisis de algunos poemas al final del capítulo 7. Aunque está basado en el cuarto principio de interpretación o de la inferencia dinámica -debido a Wildgen- y que nos permite suponer una jerarquía entre los verbos, hasta donde yo sé no se ha realizado una interpretación de esta índole. La jerarquización verbal se justifica en un

Lema de Limitación Semántica intuido por Petitot, que, debidamente formalizado, me parece habrá de convertirse en un teorema paralelo a, y no menos fértil que, el Teorema de Limitación Sintáctica de Góclel.

Este prólogo no puede cerrarse sin dejar constancia de mi agradecimiento a Antonio J. López Cruces, doctor en Filología Románica, por múltiples motivos: por las horas compartidas en las que hemos comentado la Literatura desde la perspectiva que en este trabajo se ensaya; por el entusiasmo que ha puesto en la acogida de esta teoría, lo que nos ha llevado a colaborar en algunos trabajos -que se citan en la bibliografía- y en donde hemos avanzado las posibilidades del análisis topológico cíe textos literarios; por el trabajo realizado en la selección de textos que, por sus abundantísimas lecturas, le ha permitido acceder al justo lugar, procurándome una rápida información, sin la cual las dificultades con las que me hubiera encontrado habrían sido suficientes como para hacerme desistir de la idea de escribir este libro.

Alicante, 1995

CAPÍTULO 1. **TEORÍA DE CONJUNTOS: LA CONCEPTUALIZACIÓN «CONJUNTISTA»**

Es un lugar común que la «visión conjuntista» de las matemáticas se ha extendido a buena parte de las ciencias -sobre todo por las exigencias de *formalización* y de *consistencia-,* e incluso al lenguaje ordinario -a partir de su institucionalización en la escuela primaria-. Este capítulo pretende presentar conceptualmente los *axiomas* de la Teoría de Conjuntos y el consiguiente acogimiento por parte de los Sistemas Formales de todo el edificio conjuntista creado por Dedekind (1831-1916) y Cantor (1845-1918) y mostrar cómo los teoremas de limitación de los formalismos *(incompletud* e *indecibilidad)* han permitido acceder a un resultado realmente interesante: la imposibilidad de decidir si en un segmento rectilíneo existe algún conjunto infinito ele puntos que no sea equivalente ni al segmento entero ni al conjunto de los números naturales. Ésta es la llamada *Hipótesis del Continuo.*

La Teoría de Conjuntos es el resultado de las investigaciones que tratan de salvar las *insuficiencias de la Intuición,* esencialmente en la forma en que Kant (1724-1804) la define en la *Crítica de la Razón Pura,* impotente -al menos según una crítica que se ha hecho ya secular desde Gauss (1777-1855) hasta Carnap (1891-1970)-, para hacer frente a las Geometrías no-euclícleas y a la noción de *infinito.* Lo Infinito es, por definición, lo que no puede ser captado por la Intuición, porque no sólo la engloba sino que la sobrepasa. El Infinito habrá de ser aprehendido de otra manera. Dedekind y Cantor dieron un giro a la inteligibilidad de los conceptos en matemáticas: en vez de entenderlos al modo kantiano como construcciones, como síntesis de la intuición y el concepto, partieron del Infinito como *conjunto,* que, desde entonces, se presenta como la noción mediante la cual se da la objetividad matemática. Frente a la tradición, que define lo Infinito a partir de lo Finito *(principio de inducción),* ahora lo Finito se definirá como «lo que no es Infinito», mientras que lo Infinito se define con una dureza conceptual extrema, casi rayana en lo milagroso: un *conjunto infinito* es aquel que puede ponerse en correspondencia biunívoca con una de sus partes. Quienes así lo insinuaron anteriormente fueron tachados -como era inevitable- de «metafísicos»: Anaxágoras (s. V a.n.e.), Leibniz (1646-1716) o Hegel (1770-1831).

Si aceptamos con Hilbert (1862-1943) que «ya nadie podrá expulsarnos del paraíso cantónanos, no nos queda más remedio que recorrer ese Infinito y encontrar, en sus propios límites internos, el punto de ruptura de las dos graneles orientaciones que siguen las matemáticas en nuestro tiempo:

A) La orientación *Conjuntista,* algebrista y generativa, que combina, vincula y compone elementos y cuyo punto de partida es la *pertenencia.*

B) La orientación Topológica, que trata de percibir vecindades, entornos, aproximaciones y cuyo punto de partida es el *subconjunto,* la paite, la inclusión.

Comenzaremos analizando algunos constituyentes de la primera de estas opciones.

1.1. DEFINICIÓN DE «CONJUNTO»

La definición de «conjunto» apela a las más variopintas justificaciones. Cantor se dirige directamente a la intuición: *"Un conjunto es la reunión en un todo de objetos de nuestra intuición o de nuestro pensar, bien determinados y diferenciabas los unos de los otros".* Mos-towski se apoya en el uso ordinario del lenguaje: *"Este uso de las pala-bras está plenamente sancionado por el lenguaje codidiano y no existe la menor dificultad para entenderlo".* La definición de «conjunto» como «reunión de objetos en un todo», que hace referencia a la *intuición* o *al pensar* como criterios últimos, es, obviamente, nada rigurosa y, sin embargo, desde esta «evidencia» se construye un edificio de considerables magnitudes. En el inicio mismo de nuestro recorrido nos topamos con una dificultad, ya que, aparentemente, un conjunto no es «nada» al margen de una conciencia-que-reúna-los-objetos-en-un-todo, la *conciencia conjuntista.* Mas, por definición, un conjunto infinito se escapa a esa conciencia intuitiva que podemos identificar, en este contexto, con el lenguaje ordinario. Para evitar estas aporías, Bourbaki apela a un criterio más objetual-estructural: "Un conjunto está formado por elementos susceptibles de poseer ciertas propiedades y de.mantener, entre ellos o con elementos de otros conjuntos, ciertas relaciones". Esta ambigüedad en la definición hace obligatoria una aclaración epistemológica.

El proceso de matematización de un campo de objetos (cualidades) se inicia integrando éstos en conjuntos tales que incluyan un criterio indicador de las diferencias entre ellos. A continuación, se reúnen de todos los modos posibles esos objetos en subconjuntos y se establecen *correspondencias* entre los objetos de dos conjuntos asociándolos en pares hasta agotar al menos uno de ellos: a este tipo de correspondencia se la denomina *función.* Más tarde se definen las *operaciones,* que ponen en correspondencia un par de elementos (que se puede generalizar a n elementos) del conjunto inicial de los operan-dos, con un elemento del conjunto final de los resultados de las operaciones. Un conjunto con, al menos, dos elementos (pues con uno solo nada puede construirse) y una operación definida en él constituyen una Estructura, que dota a los elementos componentes de *propiedades estructurales.*

Se definirá, portante, el concepto de «conjunto» por sus propiedades, y no a partir de sus elementos. El simbolismo habitual es el siguiente: los *conjuntos* se representan por letras mayúsculas: A, B, C...; los *elementos de un Conjunto,* por letras minúsculas: a, b, c...; la *Pertenencia* (o no pertenencia) de un Elemento a un Conjunto o de un Conjunto a otro Conjunto por «$\in$» (o «$\notin$»). V. gr.: «$a \in A$» significa que el elemento a pertenece a A, y «$a \notin A$» significa que a no pertenece a A. Para determinar plenamente un Conjunto, pueden seguirse dos procedimientos: a) *Extensional,* enumerando todos y cada uno de los elementos. Si A es un conjunto y a,b, sus elementos, el conjunto A queda definido como: A = (a,b). Procedimiento sólo útil para conjuntos finitos y de pocos elementos, b) *Intensional,* enunciando una propiedad común cumplida por todos y cada uno de los elementos. Si A es un conjunto y P la propiedad común, entonces $A = [x \mid P(x)]$, y se lee: «A es el conjunto de los elementos x tales que cumplen la propiedad P». Procedimiento preferible para conjuntos de muchos elementos e imprescindible para conjuntos infinitos. Todo el edificio conjuntista se construye a partir de una definición:

Definición 1.1. Se *denomina «conjunto» a una serie de elementos cualesquiera susceptibles de poseer ciertas propiedades y de mantener entre ellos o con elementos de otros conjuntos, ciertas relaciones. Queda, por tanto, definido un conjunto, cuando, dado un objeto, se puede decidir si pertenece o no al conjunto.*

Como con un único conjunto poco podría hacerse, podemos definir varios conjuntos y compararlos entre sí. Por ejemplo, cabría construir los conjuntos de los antepasados de un individuo x y de un individuo y. Si estos conjuntos tienen los mismos elementos, diremos que son «iguales», lo cual puede significar que tienen los mismos derechos sucesorios, que son herederos de una misma familia, y muchas otras cosas más. Formalicémoslo:

Axioma 1.1. *(o de EXTENSIONALIDAD): Dos conjuntos son «iguales» cuando tienen los mismos elementos. Se escribe A = B. Si no tienen los mismos elementos, escribiremos A≠B.* $[A = B] =_{def.} (x \mid x \in A$ *si y sólo si (síi)* $x \in B]$[2]

Mas, ¿qué ocurre si dos conjuntos no son «iguales»? Supongamos, por ahora, que todos los elementos de uno de los conjuntos de antepasados, A, son iguales a los de otro conjunto, B, pero que éste posee, además, elementos que no pertenecen al primer conjunto. Diremos entonces que A es un Subconjunto propio de B y lo simbolizaremos así: $A \subset B$. Si, además, suponemos que esos conjuntos poseen las propiedades P y Q, respectivamente, entonces todo elemento que posea la propiedad P posee la propiedad Q, o, lo que es lo mismo, es *suficiente* que un elemento posea la propiedad P para asegurar que se cumple la propiedad Q; y, al contrario, es *necesario* que se cumpla la propiedad Q para que se cumpla la propiedad P. Si el conjunto A tiene la propiedad «ser conde», entonces es suficiente para saber que el conjunto B ha de poseer la propiedad «ser aristócrata». Pero es necesario que el conjunto B posea la propiedad «ser aristócrata» para que el conjunto A posea la propiedad «ser conde».

No se trata solamente de comparar conjuntos, sino de *formar* otros nuevos a partir de conjuntos dados. Por ejemplo, podemos atribuir propiedades diferentes a los distintos elementos del conjunto y hablar del «(sub)conjunto de hombres y del (sub)conjunto de mujeres de los antepasados», pero también del «(sub)conjunto de los retratados por un pintor de cámara», el «(sub)conjunto de los que padecieron enfermedades venéreas», y tantos y tantos otros. Esta idea la formaliza el siguiente axioma:

[2] .- El signo "= def." puede leerse: "igual por definición".

Axioma 1.2. (o de ABSTRACCIÓN): *A todo conjunto Aya toda propiedad P(x) corresponde un conjunto B, cuyos elementos son precisamente aquellos elementos x de A para los cuales se cumple la propiedad P(x). B* $=_{def}$ [*x e A* | *P(x)*]

Pero ¡cuidado! El uso de este axioma requiere tomar precauciones. Sólo vale definir un subconjunto según qué propiedad elijamos. Imaginemos que alguien quisiera formar un subconjunto del conjunto A a partir de la siguiente propiedad: «mi familia reniega de sí misma», que viene a equivaler formalmente a «no es cierto que x pertenece a x»: x g x. Entonces, si reemplazamos en el axioma 1.2 la propiedad P(x) por su valor, obtenemos:

$B = [x \in A \mid x \notin x]$

Supongamos un subconjunto de B, como $y \in B$. Entonces: $y \in B = (y \in A \mid y \in A)$. La cuestión es: ¿realmente B pertenece a A? ¿O hay conjuntos como el B que no pertenecen a A? Pero ocurre que la afirmación «B pertenece a A» es *paradójica,* conduce a un círculo vicioso, a una situación sin salida. Pues, si B pertenece a A, puede ocurrir:

O bien que $B \in B$, y entonces $B \notin B$, puesto que: B G B = (B G A I B *i* B) según el axioma 1.2.

O bien que $B \notin B$, y entonces $B \in B$, puesto que es el conjunto B el que posee la propiedad $B \notin B$.

Hay que tener mucho cuidado con las propiedades que definen los subconjuntos con el fin de no caer en paradojas. Frege (1848-1925), el padre de la lógica contemporánea, quedó apenado el resto de su vida tras descubrir estas trampas en su sistema, y Russell (1872-1970), su mejor mentor, se dedicó compulsivamente a tratar de impedir que el sistema formal que estaba construyendo pudiera provocarlas. En cualquier caso, el matemático y el no matemático aprenderán una excelente lección: que no es posible obtener algo a partir de nada; que no es dado construir objetos pronunciando palabras; que no cabe crear mágicamente un mundo de la nada; que los conjuros no poseen fuerza creativa. Nadie puede tener como ancestro ¡ay! a D. Quijote, a pesar del premio *Cervantes.*

Tras la formación de las paradojas, podríamos preguntarnos: ¿De qué estamos hablando? ¿Estamos especulando en y sobre la «nada»? Lo más sensato sería abandonar aquí el recorrido, a no ser que estemos seguros de tener, como mínimo, un conjunto. Utilizaremos una argucia debida al propio Frege. Sea un conjunto A y la propiedad «falsa» $x \neq x$. Por el axioma de abstracción, tenemos: A = (xl x / x). Este conjunto, evidentemente, no tiene elementos y, por consiguiente, «existe un conjunto sin elementos» que se denomina «conjunto vacío»: «0».

Axioma 1.3. (o del CONJUNTO VACÍO). *Un conjunto que no posee elementos se llama «conjunto vacío» y se simboliza por ∅. ∅=def.* [x | x≠ x]

La propiedad más importante es la de que todo «conjunto vacío» es un subconjunto de todo conjunto (véase axioma 1.7). Se dice que ∅ es un subconjunto trivial de todo conjunto. $\varnothing \subseteq A$. Hasta aquí es notoriamente grande la pobreza de nuestro lenguaje. Pero ahora vamos a comenzar a ampliar los conjuntos de tal manera que dentro de muy poco nos toparemos con el mismísimo infinito. Dados dos conjuntos, ¿existirá un nuevo conjunto al que pertenezcan los dos? Sean dos conjuntos cualesquiera A y B, podemos remitirnos a otro conjunto C, cuyos miembros sean A y B. Imaginemos que A es el conjunto de antepasados míos y B el conjunto de antepasados de mi mujer. C será el conjunto de antepasados de nuestros hijos.

Axioma 1.4. (o del PAR NO ORDENADO): *Dados dos conjuntos cualesquiera, existe un conjunto que los contiene como elementos, y sólo* a *ellos.*

$C = def\, ((x,y)/x \in A \text{ o bien } x \in B)$

Este axioma nos permite formar conjuntos singulares, cuyo único elemento sea el elemento a. Así el conjunto ∅ y el conjunto {∅} son dos conjuntos diferentes. Es importante distinguir entre un elemento a del conjunto y un elemento {a} (esto quiere decir que a ≠ (a|), porque esta posibilidad abre la puerta a una cantidad enorme de conjuntos. Se puede proseguir con el conjunto que tiene como elemento el conjunto (∅), y luego con el conjunto que tiene como elemento el conjunto anterior {{∅}}, etc., etc., Ahora podemos considerar cualesquiera parejas formadas a partir de estos conjuntos: {(∅), {{∅}}}, y ya nada puede detenernos en la formación de nuevos conjuntos.

Los axiomas 1.1. -1.4. se utilizan como *Axiomas de Conjuntos Elementales.*

También podemos realizar operaciones entre los conjuntos A y B y obtener otro conjunto que posee todos, alguno o ninguno de los elementos de los conjuntos de partida. Hasta aquí hemos *clasificado* los conjuntos según los elementos que contienen. Pero podrían construirse nuevos conjuntos a partir de todos o algunos elementos de los conjuntos de partida. Intuitivamente diremos que una «operación» es una relación de dos elementos con un tercero. Si los tres elementos pertenecen a un mismo conjunto, diremos que la operación es «interna». Si no pertenece al mismo conjunto, la operación es «externa» y, en todo caso, el resultado ha de ser único. Dos familias se unen cuando se casan algunos de sus componentes; pero la intersección sólo afecta a los unidos por el matrimonio.

Axioma 1.5a. *Dados dos conjuntos A y B, se llama «unión» de A ∪ B, y se simboliza por A ∪ B, a un tercer conjunto que es único y cuyos elementos pertenecen o bien a A o bien a B o bien* a *ambos.* $A \cup B \,{}^{=}def.\ (x \mid x \in A$ *ó* $x \in B)$

Axioma 1.5b. *Dados dos conjuntos A y B, se llama «intersección»* de *A y B, y se simboliza por A ∩ B, a un tercer conjunto que es único y cuyos elementos son los comunes a A y B.* $A \cap B = def.\ (x \mid x \in A$ *y* $x \in B)$

Cuando $A \cap B = \emptyset$, los conjuntos A y B se llaman «disjuntos». Entre las propiedades que estas operaciones poseen destacamos: la asociativa: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$; la conmutativa: $(A \cup B) = (B \cup A)$; la absorción: $(A \cup B) \cup A = A$; la idempotencia: $A \cup A = A$; la distributividacl de la una respecto de la otra: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cap C)$. (Valen las mismas leyes intercambiando « ∪ » y « ∩ »).

Pero no queda ahí la cosa. Supongamos dos conjuntos A y B formando un tercer conjunto U (a veces llamado *Conjunto Referencia o Conjunto Universo)* que sólo tiene como subconjuntos A y B. Sea *U* el conjunto de todos los humanos. Si un joven que vive con sus amigos y colegas se casa un cierto día, ocurre que si antes pertenecía al conjunto *A* de los solteros, ahora pertenecerá al conjunto no *A,* o conjunto B de los casados, i.e., de quienes no son solteros. Si *A* es el conjunto de todos mis antepasados, el conjunto *B* sería el conjunto de todos los hombres que no son mis antepasados

Axioma 1.6. 5ea *A un subconjunto propio de B. Entonces hay elementos de B que no son elementos de A. Estos elementos pueden formar otro conjunto que se llamará «complementario» del subconjunto A en B. Se denota por* $C(A)_B, \overline{A}, B\text{-}A.\ B - A =_{def.} \{x \mid x \notin A \ y \ x \in B\}$. Supongamos que un elemento x pertenece al conjunto A o a su complementario $\overline{A}$. Llamemos U al conjunto universal U = A ∪ *A*. Entonces, la intersección de cualquier conjunto con U ha de ser vacía y la unión de cualquier conjunto con U ha de concluir con el mismo conjunto U. Esto permite establecer una serie de propiedades a partir de las tres operaciones que componen una estructura algebraica llamada *álgebra de Boole.*

$$A \cap \overline{A} = 0; \quad A \cup \overline{A} = U; \quad U \cap A = A; \quad 0 \cup A = A.$$

El álgebra de Boole se transforma en la llamada *Lógica Proposicio-nal,* mediante un cambio de notación. Mantenemos las letras de clases: A, B, C...; utilicemos el símbolo negación «¬» para el complementario «-»; el símbolo conjunción « A» para la intersección «n»; el símbolo disyunción «v» para la unión « U ». El condicional: «->» -el símbolo específico de la lógica- se define en términos de negación, conjunción y disyunción:

$$A \rightarrow B =_{def.} \neg (A \wedge \neg B) =_{def.} \neg A \vee B.$$

Si reemplazamos el conjunto universal U, por el valor 1, y el conjunto vacío por «0» siguen siendo válidas las propiedades:

$$A \wedge \neg A = 0; \quad A \vee \neg A = A; \quad 1 \wedge A = A; \quad 0 \vee A = A.$$

Como estamos tratando con subconjuntos, podemos preguntarnos si podemos construir un conjunto a partir de todos los subconjuntos de ese conjunto. Utilizaremos una estrategia muy simple: decir si tal o cual elemento se encuentra o no en cada uno de los subconjuntos. Así, dado el conjunto A={a,b,c}, y un subconjunto suyo, {a,b}, podemos definirlo como el conjunto en el que «a está», «b está» y «c no está». Como hay dos posibles situaciones por combinatoria (permutaciones con repetición) obtenemos la fórmula 2^n, que nos da el *conjunto-potencia* del conjunto: P(A). Es obvio para conjuntos finitos que P(A) no puede ponerse en correspondencia uno a uno [véase *infra]* con A, por lo que el conjunto potencia $2'^{1}$ será mayor que el conjunto mismo.

Axioma 1.7. (o del CONJUNTO-POTENCIA): *Dado un conjunto A, se llama «conjunto de las partes» de A al conjunto cuyos elementos son todas las partes de A. En símbolos: P(A). P(A) $=_{def}$ {x I x $\subset$ A], donde x son los subconjuntos de A.*

1.2. RELACIONES Y FUNCIONES

Hasta aquí podríamos decir que estamos usando el sentido común. Pero ahora vamos a adentrarnos por vericuetos muy diferentes. El concepto de *función* es un concepto muy refinado. Si, como suele aceptarse, fue Leibniz quien configuró el término *función,* necesitó rebasar no sólo toda la tradición antigua fundamentada en el silogismo de Aristóteles *(384 a.n.e.-322 a.n.e),* sino también la tradición moderna de Descartes (1596-1650), quien, por su temor al infinito (= lo que no puede someterse a ley), confundió el álgebra de lo finito (prácticamente lo que hemos tratado hasta aquí en el lenguaje de la Teoría de Conjuntos) con la *mathesis universalis.* Leibniz desarrolló el Análisis desde la teoría de las *ecuaciones cartesianas,* que eliminan las incógnitas x o y, de suerte que queda un polinomio en x^{11} o y^n; después se iguala a cero y se hallan sus raíces, es decir, los puntos en donde la ecuación se corta con los ejes de coordenadas; y, finalmente, se pregunta por la *continuidad* de la ecuación. Quedan resueltas, así, cuestiones resistentes a la investigación lógico-matemática: las relaciones uno a uno -de las que no daba cuenta la teoría aristotélica- y el principio de continuidad -del que no daba cuenta el método cartesiano-. (Hemos de recordar, sin entrar en análisis, las relaciones íntimas entre el cálculo diferencial e integral de Leibniz y su teoría filosófica de las Mónadas y la Armonía Preestablecida).

No es extraño, por tanto, que la tradición leibniziana coloque en el cálculo de relaciones el fundamento último de la lógica, de las matemáticas y de todo pensar normal: «Razón es relación». ¿Acaso *pensar* es otra cosa que *relacionar?* ¿Acaso los objetos físicos no guardan relaciones espaciales y gravitacionales? ¿Acaso los seres humanos no están relacionados de numerosas maneras: por parentesco, enemistad, amistad, orden de precedencia, etc.?

Para acceder a este concepto necesitamos el axioma del *par ordenado.* En muchas ocasiones conviene distinguir el orden que se mantiene entre los elementos de un conjunto: no es lo mismo que x sea el padre de y, que y sea el padre de x. Comenzaremos con un conjunto de dos elementos (a, b} (que puede generalizarse a terna= {a, b, c), cuaterna = (a, b, c, d); n-tupla = {a1,a2,a3,...a_n}).

Axioma 1.8. (o del PAR ORDENADO). *Dados dos elementos cualesquiera, a y b, llamamos «par ordenado» al conjunto binario (a,b) = ({a}, (a,b¡j. El par ordenado (a,bj posee dos componentes: a y b. Al objeto a se le llama «Primera Proyección del par», y al objeto b, «Segunda Proyección del par», tal que si z = (x,y), x =* $proy_1$ *z, e y =* $proy_2$ *z. (x,y)* $=_{def}$ *{{x}, {x,y}}*

De esta manera podemos dibujar las relaciones en las clásicas coordenadas cartesianas. Sean dos conjuntos cualesquiera A y B, el Producto de A y B, simbolizado por A x B, es otro conjunto al que pertenecen todas las parejas ordenadas que se pueden formar con los elementos de A y B y cuya primera componente pertenece a A y la segunda componente a B: si A tiene m elementos y B, n elementos, A x B tendrá m x n elementos. Hablamos del *grafo* de un conjunto, G, cuando todos sus elementos son pares ordenados.

Sean los conjuntos A = |a,b,c) y el conjunto B = (1,2). El producto A x B tendrá 3x2 = 6 elementos, a saber: A x B = ((a,1), (a,2), (b,1), (b,2), (c,1), (c,2)). El producto se puede representar gráficamente en coordenadas cartesianas. Cada par ordenado será el punto de intersección del eje x de las abasas con el eje y de las ordenadas. Las relaciones binarias tienen dos importantes propiedades:

i) Relaciones Uno-a-Uno entre conjuntos diferentes. R ⊂ A x B: Propiedades fundamentales para el concepto de Función.

Definición 1.2. *Una relación se dice que es «Total por la izquierda/ Total por la derecha», síi: {(x_1,x_2) | (x_1,x_2) ∈ R{ /(x_2,x_1) | (x_1,x_2) ∈ R}*

Definición 1.3. *Una relación se dice «Unívoca por la izquierda / Unívoca por la derecha» síi: | (x,y,z) | si (x,y)* e *R y si (z,y)* e *R, entonces x=z) / | (x,y,z) | si (x,y)* e *R y si (x,z)* e *R, entonces y=z)*

ii) Relaciones entre dos conjuntos idénticos. R **c** A x A: Propiedades fundamentales para las estructuras de orden y equivalencia *-ordenar y clasificar-,* que son herramientas básicas tanto para la vida cotidiana como para la ciencia.

Definición 1.4. *Una relación R en un conjunto A es «reflexiva», si todo elemento de A está relacionado consigo mismo según R. R es Reflexiva si {xl (x,x) ∈ R}*

La relación reflexiva impide las relaciones de parentesco. Por eso sólo al hablar de Dios o de sus sucedáneos se puede, con rigor, hablar de «reflexividad»: Yaveh decía «Yo soy el que soy»; el dios de Aristóteles era pensamiento de pensamiento, *«noesis noeseos».*

Formalmente se dirá que para un conjunto dado A = {a,b,c,d}, la relación R' = j(a,a), (a,b), (b,b), (b,c), (c,c), (d,d)) es «reflexiva» porque contiene todos los pares: (a,a), (b,b), (c,c), (d,d) [Fig. 1.1].

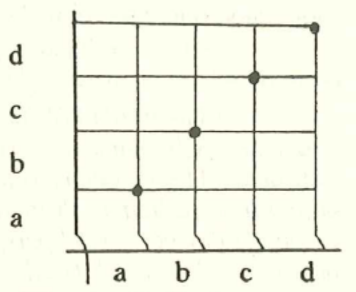


Fig. 1.1 Reflexiva

Definición 1.5a. *Una relación R definida en un conjunto A es «simétrica» cuando para todo par de elementos x e y de A se cumple que, si x sostiene la relación R con y, entonces y sostiene la relación R con x. R es Simétrica si l(x,y)l (x,y) ∈ R y (y,x) ∈ R).*

Si Fulano es hermano de Mengano, Mengano ha de ser hermano de Fulano. Sea el Conjunto A = {a,b,c,d} y la relación R'= ((a,b), (a,c), (b,a), (a,d), (d,a), (c,a), (a,a)|). R' es Simétrica porque contiene los pares ordenados: (a,b) y (b,a), (a,c) y (c,a), (a,d) y (d,a) [Fig. 1.2].

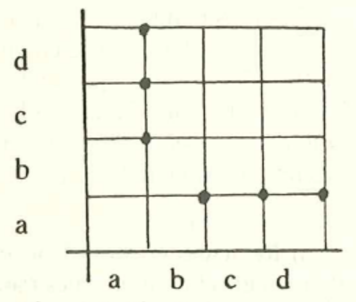


Fig. 1.2 Simétrica

Definición 1.5b. *Decimos que una relación R definida en un Conjunto A posee la propiedad «asimétrica» cuando no posee la propiedad simétrica.*

Definición 1.6. *Decimos que una relación R definida en A es «antisimétrica» cuando para cualesquiera elementos x,y que pertenecen a A, vale que si (x,y) ∈ R y (y,x) ∈ R, entonces x = y. De otra manera: una relación que no sea simétrica para* *ningún par de elementos excepto si ambos son el mismo. Además, no se requiere que (x,x) o (y,y) pertenezca a la relación. R es Antisimétrica síi:*)

$\{(x,y) \mid (x,y) \in R$ y $(y,x) \in R$, entonces $x = y\}$.

El hijo único. Sea el Conjunto A = (a,b,c,d) y la relación R''' = ((a,a), (a,el), (b,a), (b,c), (d,c)). Esta relación es «antisimétrica» porque R^{1}'' no contiene ninguna pareja tal como (a,c) y (c,a)... pero sí (a,a) [Fig. 1.3].

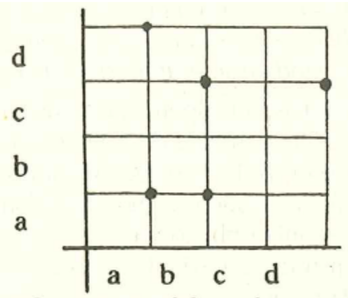


Fig. 1.3 Antisimétrica

Definición 1.7. *Una relación R en A es «transitiva» cuando para cualquier elemento x,y,z, que pertenece a A, se verifica que si (x,y) ∈ R y (y,z) ∈ R, entonces (x,z) ∈ R. R es transitiva* Fig. 1.3 Antisimétrica *síi l(x,y,z)l (x,y) ∈ R y (y,z) ∈ R, entonces (x,z) ∈ R).*

Al fin encontramos la relación que nos está sirviendo de ejemplo: «Ser antepasado de». Sea el conjunto A = (a,b,c) y la relación R^{iv}= {(a,a), (a,b), (a,c), (b,b), (b,a), (b,c), (c,a), (c,b), (c,c)}. Esta relación es Transitiva porque si contiene (a,b) y (b,c), entonces contiene (a,c), etc.

[Fig. 1.4].

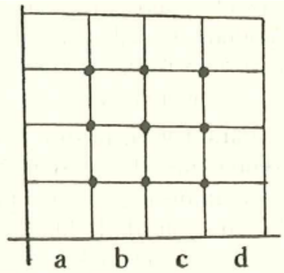


Fig.1.4 Transitiva

Definición 1.8. *Una relación R definida en A es «conexa» si para cualquier par de elementos diferentes de A, o bien (x,y) c R, o bien (y,x) ∈ R, o bien ambos pertenecen a R. R es Conexa síi ((x,y) | (x,y) ∈ R o bien (y,x) ∈ R, o ambos pertenecen a R}.*

Esto quiere decir que todos los elementos de un conjunto están «conectados» según la Relación dada. ¿Acaso la conectividad entre todos los seres humanos no se fundaba en el pecado, herencia de nuestros antepasados, quienes, a su vez, lo heredaron de Adán y Eva? Para mantener la unidad de todos los hombres ha habido que usar relaciones conexas. Por ejemplo: «Todos somos hijos de Dios»; «Todos descendemos de una madre africana, Lucy», «Todos formamos una sola raza», etc.

El tipo de relación que ha permitido desplegar la ciencia moderna es el de función. *"Lo característico -escribe Ortega- del por qué en la ciencia moderna no es ningún valor y entidad mística que se conceda a supuestos poderes ocultos, sino, más sencillamente, consiste en la fórmula de una conexión necesaria entre series de variaciones fenoménicas. Esta conexión es necesaria cuando es exacta, ni más ni menos; cuando a cada elemento de una serie corresponde en la otra serie uno y sólo uno; cuando, en una palabra, se puede establecer entre los hechos una función de expresión matemática más o menos conclusa. Cuando esto es imposible, la ciencia se contenta con ser descriptiva".*[2] Las correspondencias no imponen restricción alguna a la relación R. Un elemento de A puede poseer ninguno, uno, o varios consecuentes en B. Pero se puede introducir una restricción: que para todo elemento x que pertenezca al dominio de R, x ∈ A, exista como máximo un único objeto y que esté relacionado con él. Esta relación se denomina: *Función Uniforme, Relación Funcional* o, simplemente, *Función.*

Definición 1.9. *Dados dos conjuntos A y B, R es una «relación funcional» o «función» síi (x,y) $\in$ R y (x,z) $\in$ R, entonces y = z.*

En general se simboliza por A -> B y se lee: «f es una función de A en B». Cuando la función actúa sobre elementos, asociando a un elemento de x $\in$ A, un valor y sólo uno y $\in$ B, entonces usamos esta notación: f: x —> f(x), que significa: la imagen f(x) de fes el subconjunto (f(x) | x $\in$ A) de B.

Una función se caracteriza como la terna ordenada (G, A,B) donde G es el «grafo funcional» y G $\subseteq$ A x B. Al conjunto A se le llama el conjunto «inicial» y al conjunto B, el conjunto «final». Al conjunto original se le llama «dominio de la función» y al conjunto de las imágenes, «imagen», «rango» o «recorrido» de f.

Para Thom, la función tiene un origen propiamente filosófico. Como el mundo exterior se presenta entremezclado de deterninismo e indeterminismo, hay una parte que depende de nosotros, la *variable o* el argumento de la función; y otra que no depende de nosotros: una vez elegida la variable, queda determinado el *valor de la función.*

Supongamos que elegimos, de entre todas las parejas posibles, aquellas que relacionan distintos elementos de A con distintos elementos de B, v. gr., R^v = ((a,1), (b,2)}. Diremos que esa relación R^v es una función f_1: A -> B que se llama «inyectiva» si para todo elemento y e B es a lo sumo una imagen de un elemento x $\in$ X. Si elegimos de entre los pares, aquellos en los que todo elemento de B está en correspondencia con, al menos, un elemento de A, v. gr., R^{vi} = {(a,1), (b,1), (b,2), (c,2)) la relación R^{vi} es una función f_2: A -> B y se llama «sobreyeetiva». Si es a la vez «inyectiva» y «sobreyectiva», diremos que es «biyectiva». (La relación padre-hijo no es una función; pero la relación hijo-padre sí lo es.)

Definición 1.10. *Dada una función f entre dos conjuntos A y B, se llama «función inversa» de f y se representa por f^1 , a la relación funcional entre B y A que se obtiene al invertir las parejas de f.*

Consideremos las funciones de la Figura 1.5. La correspondencia inversa g"^{1} no es una función porque:

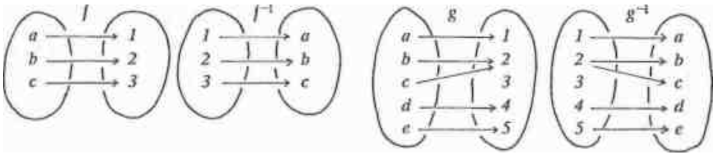


Fig. 1.5 Función inversa

a) El elemento 2 está relacionado con dos elementos b y c.

b) Y, además, el elemento 3 no posee imagen.

Se puede sacar la conclusión, por tanto, de que sólo si se cumple que la función f es *biyectiva* la inversa de una aplicación será una aplicación. Si f no es inyectiva, f^{-1} no es aplicación y si f no es suprayectiva, f^{-1} tampoco. Para hallar la aplicación inversa de una aplicación *biyectiva,* es conveniente utilizar la siguiente regla:

i) Se despeja la variable x. i i) Se sustituye y por x y x por y. Así:

y = 3x; x=y/3; y=x/3.

¡No hay que confundir la aplicación *inversa con la inversa de una aplicación*[1]. Si, en el caso anterior, tenemos que y=x/3 es la aplicación inversa, la inversa de una aplicación es y=1/3x.

1.3. EL INFINITO DE CANTOR

Nuestros «antepasados» nos han permitido llegar hasta aquí. Pero supongamos con Lévi-Strauss que la formación de la humanidad tuvo que ver con la regla del *tabú del incesto.* Entonces, como ha puesto de relieve Ribeyro, cada uno de nosotros, en vez de descender de Adán y Eva, proviene de miles, de millones... ¡de cuasi-infinitos antepasados! Pues ¡sea! Cada uno de nosotros ha de tener dos padres, cuatro abuelos, ocho bisabuelos y dieciséis tatarabuelos. Si seguimos hacia atrás, en el año 1.050 tendríamos 1.069.645.824 ancestros. Ribeyro no continúa por penetrar en los terrenos del absurdo, de la más grande falsedad histórica: simplemente porque en el año 1.060 la población del mundo no llegaba a dos mil millones de habitantes. Nosotros, en cambio, carecemos de tales remilgos y multiplicamos ahora ese número por los 6.000 millones de individuos que habitamos el planeta azul: 6.000 millones x 1.069.645.824 ancestros cada uno, da una cifra absolutamente fantástica; 6,42 x 10^{18} ¿Cómo manejar cantidades semejantes?

Por una parte, es fácil comparar los números: unos son mayores, otros menores y otros iguales. Se dice que dos conjuntos son ¡guales si hay correspondencia uno a uno. Pero si existe alguna idea extraña ésta es la de «infinito». Nadie hasta Cantor -el verdadero fundador del pensamiento contemporáneo del número- se había atrevido, si no a construir el infinito, sí a distinguir partes en él y a afirmar que una parte del infinito es equivalente al infinito global, que ya no es potencial, como había venido siendo contemplado desde Aristóteles, sino actual. Pero ¿cómo introducir un orden en la indeterminación que es, por antonomasia, el infinito?

Esbocemos el esqueleto del argumento de Cantor estudiando tres aplicaciones:

$$f_1: \mathrm{N} \to \mathbf{R}\ ;\ f_2: \mathbf{R} \to \mathbf{R}^n\ (n \geq 2);\ f_3: \Pi \to \mathbf{R}.$$

i) Comencemos por la aplicación *U*: N -> R. La cuestión que trata de resolver es el papel que juegan los *números irracionales* para «cerrar» los agujeros que los números racionales dejan sin cubrir en la recta. A lo largo de la historia, se han ido ampliando cada vez más los tipos de número. Primero fueron los naturales, N, luego los enteros positivos, Z+, y más tarde los números racionales, Q, y los números algebraicos o raíces. Con la introducción del cero se manejaron los enteros negativos, Z-, los trascendentes, y los complejos, C. Cantor se pregunta: ¿Cuánto más rico es el continuo de la recta real que el conjunto, también infinito, de los números racionales? El principio inductivo de generación de los números *(primer principio* de generación) utiliza la operación «sucesor» sin alcanzar nunca el máximo: 1,2,3...n... ¿Por qué no imaginarse -se dirá genialmente Cantor- un nuevo número que exprese el orden natural del conjunto completo? Si establecemos una regla de sucesión de enteros, n', obteniendo la serie: 1, 2, 3 ... n, n+1..., entonces podemos imaginar: a) un nuevo número ω, *el primer conjunto bien ordenado,* que sea el primer número que sigue a la sucesión de números naturales, v ; b) además, el conjunto más grande de todos los números, el «primer transfinito», ω_0, que sirve de límite: el primer entero mayor que cualquier entero situado a continuación de la sucesión completa de los números ordinales ordinarios y que se convierte en matriz de todos los otros números; c) puede definirse el número ω como «la sucesión completa de los números naturales, N» o «límite al que tienden los números naturales». Ahora cabe ir generando nuevos ordinales transfinitos sucesivos si asociamos el número co a las unidades primitivas: (ω +1,(ω +2... ω +ω ... Al carecer esta serie de elemento máximo, puede imaginarse otro número ordinal, 2ω, que será el primero después de los números hasta ahora obtenidos v y ω +v, y así sucesivamente. Esta regla, que denomina «segundo principio de formación», permite la definición de un nuevo número que se considera límite de los primeros, inmediatamente superior a ellos. Aplicando ambos principios, se puede definir una jerarquía de números ordinales transfinitos progresivamente mayores:

$$\begin{gathered}2\omega+1,\ 2\omega+2,\ \ldots,\ 2\omega+\omega=3\omega\ \ldots,\ \omega\times\omega=\omega^2,\ \omega^2+1,\ \ldots,\ \omega^2+\omega+1,\ \ldots,\\ \omega^2+\omega+\omega=\omega^2+2\omega,\ \ldots\ \omega^2+\omega\times\omega=2\omega^2,\ 2\omega^2+1,\ \ldots,\ \omega\times\omega^2=\omega^3,\ \omega^3+1,\ \ldots,\\ \omega^\omega,\ \ldots,\ \omega^{\omega\omega},\ \ldots\end{gathered}$$

La formación de nuevos números carece de final y entonces no habría diferencia entre estos dos modos de generación de números. Pero Cantor introduce un *principio de detención o* de corte, que permite una reordenación de estos números, pues un conjunto transfinito co, que posee una cardinalidad co, puede ordenarse de diferentes maneras, y cada una de ellas da lugar a un transfinito diferente:

$$\begin{aligned}&a_1, a_2, a_3, a_4 \ldots a_n = && \omega;\\ &a_1, a_3, a_5 \ldots a_2, a_4, a_6 \ldots = && \omega+\omega = 2\,\omega;\\ &a_3, a_4 \ldots a_n \ldots a_1, a_2 \ldots = && \omega + 2;\\ &a_n, a_n+1, a_n+2 \ldots a_1, a_2 \ldots a_n = && \omega + a_n, \text{ etc.}\end{aligned}$$

Curioso ¿no? El número cardinal es el mismo, pero el número ordinal no. Cantor se encuentra con las manos libres para exponer el siguiente axioma:

Axioma 1.9 (o del CONJUNTO FINITO): *Si coinciden el cardinal y el ordinal, entonces es un número finito.*

Pero si un conjunto como el de los números naturales es infinito, ¿contiene todos los elementos que se esperan de él? La manera de averiguarlo puede ser poniendo en correspondencia determinados conjuntos. Tal es el famoso *método de la diagonal* de Cantor. Intuitivamente, el método diagonal significa que dado un conjunto, éste no contiene todos los elementos que se esperan de él. Tomemos como base este mismo libro en el que escribimos. Si cada línea contuviese una frase, podríamos escribir un libro distinto tomando una letra de cada línea, en forma diagonal, de tal modo que se diferenciase del primero en la primera palabra, del segundo en la segunda, del tercero en la tercera y así sucesivamente. Podemos añadir este libro a la lista, pero, inmediatamente, podríamos escribir otro libro que se diferenciase de este último en la última palabra. Por tanto, nunca podríamos obtener el conjunto de todos los libros escritos. Cantor demuestra el siguiente teorema:

Teorema 1.1. *El conjunto* R *de todos los números reales no puede ponerse en correspondencia biunívoca con el conjunto* N *de todos los números naturales, i.e., el conjunto* R *de todos los números reales no es numerable".*

No todos los conjuntos tienen la misma cardinal ¡dad. El continuo, asociado a la recta real, no es numerable, ya que existen conjuntos más numerosos que N, conjuntos que no pueden ser numerados, y habremos de suponer un conjunto complementario -i N para llenar R. La cuestión que queda abierta es: ¿Existe un conjunto infinito intermedio entre los conjuntos del tipo N y los conjuntos infinitos del tipo R, o son sucesivos? Hemos de advertir, en todo caso, que el camino que nos conduce a la definición de conjunto infinito parte de la existencia de los números naturales. Se necesita de ellos para establecer la correspondencia de partida, f: N -> R.

¡i) En segundo lugar, Cantor se pregunta por la aplicación: f2: R -> R^n ($n \geq 2$). Introduce entonces un concepto llamado a jugar un papel básico en la nueva matemática: la «potencia» o «cardinalidad» de un número. Todos los números que tengan la potencia de los números naturales N (como los números enteros Z, los números algebraicos...) se llaman «conjuntos enumerables», «contables» o «numerables» y su cardinalidad es $\aleph_0$. Los conjuntos que tienen la potencia de los números reales, R, se denominan «conjuntos no-enumerables» y su cardinalidad es c. Cantor encuentra, por consiguiente, dos tipos de cardinalidad y demuestra el teorema fundamental de la Teoría de Conjuntos:

Teorema 1*.2. Un conjunto infinito M tiene un subconjunto finito enumerable. Este teorema da paso a un importante corolario, que se utiliza a veces como un axioma:*

Axioma 1.10 (o del CONJUNTO INFINITO): *"Un conjunto infinito M es equivalente a un subconjunto propio suyo"*.

Este axioma no presupone, como en el caso anterior, la existencia de los números naturales. La cuestión ontológica se hace ineludible: ¿Existen tales conjuntos infinitos? Si no presuponemos N, no es necesario que existan conjuntos infinitos. Por tanto, hay que garantizar su existencia y para ello hemos de suponer que existe N, que es, a la vez, no-finito e infinito. Coincidentes ambos conceptos de infinitud, se hace preciso introducir el axioma de elección. Éste establece que, dada una partición de un conjunto, existe otro conjunto «selectivo» formado justamente por un único elemento de cada una de las partes de la partición. Pero el axioma no dice cómo se eligen los elementos. La importancia del axioma radica en que si no lo aceptamos entonces habrá distintos tipos de infinitud y, consiguientemente, de finitud. Habrá conjuntos mayores que cualquier conjunto finito, pero que no serán infinitos, pongamos por caso.

Axioma 1.11 (o de ELECCIÓN). *Para todo conjunto A no vacío existe un conjunto B tal que tiene justamente un elemento en común con cada miembro de A.*

$$\{x \mid \emptyset \notin x \rightarrow \exists a{:}x \rightarrow \cup x / \forall x \in x(f(a) \in x)\}$$ [4]

Cantor encuentra un método para comparar los tamaños de los números cardinales y demuestra que $\aleph_0$ < c. La pregunta que podía hacerse a continuación era: ¿Existirán números mayores que c?

iii) Pero Cantor va más lejos y estudia la aplicación f3: π -» R. ¿Puede pensarse siquiera en la relación entre un plano (b/'-dimensio-nal) y la recta (un/'-dimensional)? Así que la posibilidad de una respuesta afirmativa era ya tremebunda: ¡la dimensión del espacio no está delimitada por el número de coordenadas! Nada de extraño tiene que alguno de aquellos matemáticos (Krónecker (1823-1891), por ejemplo) se resistiese a entrar en este «paraíso». (Dedekind vio que esta correspondencia, si bien es biunívoca, no es *continua).* Nos podemos preguntar ahora por la relación que hay entre los conjuntos infinitos y sus subconjuntos. Dado un conjunto finito, si queremos hallar sus subconjuntos podemos utilizar el axioma del Conjunto-potencia. La cuestión que habrá de discutirse es si esta propiedad permanece para conjuntos infinitos.

Teorema 1.3. *El conjunto-potencia de un conjunto dado cualquiera (el conjunto formado por tocios sus subconjuntos) tiene mayor potencia que el mismo conjunto de partida:*

A < P(A).

Para un conjunto infinito de cardinalidad $\aleph_0$, SU conjunto potencia P($\aleph_0$) tiene como cardinalidad $2^{\aleph_0}$. Por el teorema 1.3, $2^{\aleph_0} > \aleph_0$. El cardinal de P($\aleph_0$) denotado por c, es el conjunto de los conjuntos de los números naturales, que pueden escribirse en un sistema de base 2, como secuencias infinitas de 1s y Os. Cantor demuestra que el número mayor que podemos obtener será $2^{\aleph_0}$, que tiene precisamente la potencia del continuo. Pero, ¿c sigue inmediatamente a la potencia del conjunto N? Parece, en un primer acercamiento, que ambos conjuntos, los numerables, $\aleph_0$, y los no-numerables (el continuo), c, se relacionan a través de la ecuación: $2^{\aleph_0}$ = c.

¿Puede existir en un segmento rectilíneo algún conjunto infinito de puntos que no sea equivalente al segmento entero y tampoco al conjunto de los números naturales? Cantor había demostrado que Ng era el primer número cardinal de todos los conjuntos posibles con cardinal finito; que $2^{\aleph_0}$ era el conjunto de todos lo números reales o, dicho de otro modo, tenía el cardinal del continuo; que existía una sucesión de alefs tal que: $\aleph_0$, $\aleph_1$, $\aleph_2,\ldots,\aleph_N$. ¿Dónde se acomoda $2^{\aleph_0}$? Según el teorema 1.3 de Cantor, $2^{\aleph_0}$ es el conjunto potencia de $\aleph_0$, luego ha de ser mayor que él. La conjetura -que Cantor no pudo demostrar- de que no hay ningún conjunto intermedio es la *Hipótesis del Continuo:* en el conjunto R de los números reales, cualquier subconjunto infinito es o bien numerable o equipotente con R. Esto puede formalizarse así: $2^{\aleph_0}=X_1$

O dicho de otro modo: ¿Debe cualquier subconjunto infinito de números reales ser numerable (equipotentes a N) o continuo (equipolentes a R)? ¿Existe algún conjunto intermedio? ¿Coincide c con $\aleph_2$, $\aleph_2,\ldots,\aleph_N$?

1.4. LA HIPÓTESIS DEL CONTINUO

Fue el *programa formalista* el que permitió vislumbrar la solución, que se produjo al darse la mano los Lenguajes Formales (nos remitimos a cualquier libro de Lógica simbólica o Análisis Formal) y la teoría cantoriana del Infinito: *"En primer lugar -comenta De Lorenzo- la introducción de la teoría de conjuntos en la matemática y de la teoría de funciones proposicionales en la lógica, puso de nuevo estos dos temas en estrecho contacto. Para Frege y para Russell la conexión entre ellos era tan estrecha que se adhirieron a la teoría, llamada «logi-cismo», de que la matemática (para Frege solamente la aritmética) era una rama de la lógica y que, por tanto, a la teoría de conjuntos transfinita se le podría dar una fundamentación rigurosa, completamente aceptable matemáticamente".*

Desde un punto de vista formal, lo importante era que el sistema no encubriese contradicción alguna. Y esto sólo podía garantizarlo, para conjuntos infinitos, un sistema perfectamente definido y controlable. Si se acepta que los axiomas de la teoría de los conjuntos, los medios lógicos de deducción y una teoría de modelos agotan de hecho el aparato demostrativo de las matemáticas actuales, se puede decir que el *problema del continuo* representa en sí un ejemplo de un problema absolutamente *indecidible.* El canon de este tipo de problemas es el Teorema de Gódel, que, no obstante, permite la decibilidad con tal de colocarse en un sistema superior. La ¡ndecibilidad de la hipótesis del continuo, sin embargo, no se deja solucionar tan fácilmente. Pues Cohén demostró que no es imposible suponer decenas, centenas, millares... de conjuntos intermedios. En apretada demostración:

Supongamos que nuestro Sistema Formal posee un *modelo.* Un modelo es un conjunto X de *n* elementos que se encuentran en correspondencia con los componentes del sistema formal. Añadámosle un. objeto a con todas las consecuencias que él provoque en el conjunto. Entonces se obtiene otro modelo N tal que:

$M \cup a = N$ ==> a) N es un modelo para Z; b) a no es construible en N; c) a es numerable. ¿Cómo especificar a? Pues *a* tiene propiedades *singulares* y propiedades *generales* que comparte con los demás conjuntos. Añadamos, en vez de *a,* una infinidad de objetos de cardinalidad w2.

$M \cup \omega_2 = N^*$, que a) N* sigue siendo un modelo; b) w_2 no es construible en N*; c) ω_2 es numerable. La condición de numerabilidad puede formalizarse como el producto cartesiano $\omega_0 \times \omega_2$. Pero esto significa que todo conjunto A de nuestro universo de conjuntos ordenados pertenece a alguno de los subconjuntos cuyo primer elemento pertenece a cog. Por consiguiente, el conjunto potencia de ω_0, $P(\omega_0) > \omega_1$, que es la negación misma de la hipótesis del continuo: que $P(\omega_0) = \omega_1$

Los números han quedado clasificados, por tanto, en dos grandes apartados: *los finitos,* que se rigen por el principio de inducción, y *los infinitos,* que establecen relaciones entre la totalidad de la clase y alguna de sus partes. La totalidad de la clase se refleja en una parte de ella. La cuestión que nos plantearíamos de inmediato es: *¿Cuáles son los criterios ontológico-gnoseológicos de esta división?* ¿Es una clasificación gnoseológicamente fundada o meramente *ad hoc* para salvar una situación? ¿Existen cosas tales como el infinito actual?

Si podemos hablar de tres grandes pensamientos filosóficos en nuestro siglo -analítico, fenomenológico y dialéctico-, podemos decir que cada uno de ellos ha intentado una solución a la cuestión del *continuo.*

1) El pensamiento analítico-pragmático -desde el esperanzador optimismo de la construcción de los lenguajes formales hasta el pesimismo de los teoremas de limitación- ha optado por abandonar estas investigaciones, tachadas de ontológicas, y se dedica a la aplicación de la lógica a las técnicas *-hardware y software* de los ordenadores- o a problemas del lenguaje ordinario -lógicas modales, temporales, etc.-.

2) La fenomenología -inspirándose en la tercera de las *Investigaciones Lógicas* de Husserl (1859-1938), que se ocupa de una teoría de los Todos, ha tratado de estudiar las relaciones de parte a todo. V. gr., la *mereología* de Lesniewski.

3) La dialéctica, que reconoce a Zenón (s. V a.n.e.), Anaxágoras, Leibniz o Hegel como sus antecesores destaca un tipo de pensamiento enemigo de la actitud finitista, atomista, reduccionista y reivindica un pensamiento infinitista, holista y organológico.

Es el momento de reorientar todo lo dicho hasta aquí. Los formalismos, desde Zermelo (1871-1953) o Russell, han estado vinculados a la teoría de conjuntos. Pero este proyecto, desde un punto de vista científico, comete aquella falta que los griegos clásicos llamaban *hybris:* la ambición desmesurada. Sólo como tarea filosófica esta investigación es legítima y llega a un resultado de un valor intelectual sin paliativos, que muestra la «dignidad del hombre», como gusta decir Víctor Gómez Pin. Ahora ya sabemos que los hechos de limitación han surgido en el esfuerzo radical de aclaración a partir de la propia experiencia de la matemática. Pero, al tratar de fijar las condiciones a que está sometido, este pensamiento ha elaborado un sistema que contiene la génesis de su propio sentido y esto desborda la capacidad de la ciencia. Y así lo ha visto -y nos lo ha enseñado- Rene Thom, quien comenta: *"Aparte de un cierto interés filosófico -innegable-, estos resultados [Tarski, Gódel, Cohén] demuestran tan sólo que es inútil trabajar en determinadas direcciones. Ésta es, y perdonen el juego de palabras, su utilidad. Son como guardacantones que nos indican que no hay que salirse de la carretera".*^ Sería absurdo intentar formalizarlo todo. Entonces, ¿por qué la matemática habría de poder basarse en sí misma? ¿Por qué habría de ser la única ciencia que encontrara sus fundamentos en sí misma o en la lógica?

Pero ocurre que, además de esta falta de medida, el proyecto metodológico formalista se compromete con una ontología de lo discreto, vinculada a una epistemología *reduccionista.* El reduccionismo defiende que el mundo es explicable a partir de las partículas elementales *(quarks),* de las fuerzas atómicas, electromagnéticas, etc. Thom, desde una posición estructuralista se interroga sobre cómo se explicaría la posibilidad misma de configuraciones cerradas, Le., de organismos que son estructuras de estructuras de estructuras.... de partículas. La previsible respuesta -la *emergencia* ortológica de estructuras que van acumulándose desde las partículas atómicas hasta las sociedades más complejas suponen una suerte de «creacionismo» totalmente arbitrario-es combatida por Thom encuadrado en el equipo de los dinami-cistas: De unas partes pueden surgir otras partes y esto es incomprensible si no se supone ya dado el Todo (v. gr., el modelo de Speman *versus* el modelo mendeliano). El organismo será una estructura *metafinita,* un sistema equilibrado de partes regido por un centro organizador que recuerda aquel concepto neoaristotélico de *alma* en cuanto presente «toda en todo y toda en cada una de sus partes». Dice Thom: *"Es la dinámica del estallido del centro del cuerpo (el alma), que, siendo único en potencia, se fragmenta en una pluralidad de almas parciales en acto. En un modelo de tipo catastrófico [Cap. 4], se trata de una dinámica de «despliegue». Si toda parte tiene una definición funcional, debería ser posible asociar a cada parte un «cuestionario» catastrófico, de suerte que la paite considerada fuera la especie última definida por la respuesta «sí» a todas las preguntas del cuestionario".*[7]

La oposición al reduccionismo metodológico y epistemológico y al emergentísimo ontológico invita a un cambio de lenguaje matemático. No se tratará ahora de una *combinatoria algebraica,* sino de un *des-pliegue morfológico.* La oposición a la ontología reduccionista exige una ontología de lo *continuo* por relación a la ontología de lo *discreto,* de lo numerable. Pues, en definitiva, los conjuntos que definen el Infinito y el Continuo se definen a partir de los números naturales y Thom, sorprendentemente para muchos, afirma todo lo contrario: es el Infinito Numerable el que queda inmerso en el Continuo, como se pone de manifiesto desde el momento en que la operación sucesor n' ha de desarrollarse en el Tiempo, que es una entidad continua. Así, el continuo exige un espacio-sustrato de una riqueza enorme, un espacio-sustrato que Thom aborda con puntos localizados. Los problemas del transfinito cantoriano se deben -dirá Thom- a su falta de localización espacial.[8] Ahora bien, esta ontología necesita de una herramienta matemática de cuño distinto al conjuntista: unas matemáticas que comprendan los puntos dados en el espacio. Este será el territorio propio de la Topología.

EJERCICIOS

Es muy común interpretar los formalismos de la Lógica clásica y de la Teoría de Conjuntos como idealizaciones del lenguaje natural. Históricamente podríamos encontrar su razón en la compleja estructura algebraica de los lenguajes indoeuropeos, en los que se ha gestado la escritura simbólica. A veces se ha extrapolado la tesis del origen con la afirmación estructural de que los lenguajes lógico-formales son el esqueleto al que han de plegarse las frases con sentido, los enunciados. Los ejercicios que siguen pueden servir para recordar al lector esta interpretación del lenguaje natural en los términos del lenguaje formal.

1) Traducir al lenguaje de conjuntos:

a) "Esta reflexión sirvió para mostrar que la teoría del conocimiento, fundada en la noción de que las «matemáticas», la «teología» o la «ciencia» o las tres unidas bastaban para agotar los problemas del conocimiento en general, no era satisfactoria. El pensamiento histórico postula un objeto dotado de peculiaridades propias". COLLINGWO-OD,R.C: Idea de la historia, México, 1986, p. 15.

b) "El surgimiento del lenguaje, por ejemplo -uno de los atributos más característicos del hombre- parece un fenómeno Inexplicable, ya que no puede existir sin la sociedad, la cual, a su vez, no puede existir sin el lenguaje". GRIMSLEY,R.: La filosofía de Rousseau, Madrid, 1977, p.50

c) "P. «Qué es una ciudad en llamas? M. Un tren enloquecido». La respuesta da a entender que una ciudad que no arde es como un tren «cuerdo», es decir, una *máquina que funciona con precisión según leyes físicas y mecánicas". RAMÍREZJ.A.: Edificios y sueños, Barcelona, 1983, p. 339.*

2) ¿Qué propiedades lógicas caracterizan los siguientes textos?

a)"Muy vivo ha de ser el que pueda decir si Marx primero se eligió revolucionario y después filósofo, o primero filósofo y después revolucionario. Es filósofo y revolucionario. Es un conjunto. Se ha elegido primero revolucionario ¿qué quiere decir eso?". SARTREJ.P.: El existencialismo es un humanismo, Buenos Aires, 1985, p. 46.

b) "No soy francés, ni alemán, ni inglés, ni español; soy habitante del mundo y no estoy al servicio del emperador, ni del Rey de Francia, sino al exclusivo de la verdad". Fierre BAYLE.

3) Complétense los textos escribiendo en los puntos suspensivos el tipo de relación pertinente: Reflexiva, Simétrica, Asimétrica, Antisimétrica, Transitiva, Intransitiva, Conexa:

a) "Esta estrategia o apuesta, dio resultado, pues la fusión de los dos estados siguió siendo manifiestamente......... : la aristocratización o ennoblecimiento de la burguesía dócil fue mucho más penetrante que el aburguesamiento de la nobleza imperiosa". MAYER,A.: La persistencia del Antiguo Régimen, Madrid, 1984, p. 84.

b) "La.........del crimen se inscribe aquí en el horizonte de la constitución de la autoconsciencia. Al matar al otro me mato a mí mismo, en tanto el otro es el lugar donde me reconozco". TRIAS,E.: El lenguaje del perdón, Barcelona, 1981, p. 110.

c) "En cuanto uno se propone escribir la historia de la Revolución Francesa sabe (o debería saber) que no podrá ser simultáneamente y a igual título, la del aristócrata. Por hipótesis sus totalidades respectivas (cada una de las cuales es......... respecto de la otra) son igualmente verdaderas". LEVI-STRAUSS,CL: El pensamiento salvaje, Buenos Aires, 1970, p. 374.

d) "Hay una .... en *el crecimiento del conocimiento científico entre errores y verdades aceptadas: las primeras se rechazan con firmeza y definitivamente; las segundas se aceptan sólo provisionalmente. De modo semejante, hay.......en el proceso de aprendizaje moral: se aprende o se acaba aprendiendo, a rechazar con firmeza monstruosidades o aberraciones morales; en cambio, las experiencias que no llegan a ese límite permiten mantener un margen de discusión, interpretación y experimentación abierto". PÉREZ DIAZ,V.: Marx, Madrid, 1984, p. 113.*

e) "Construido por los individuos corpóreos (átomos económicos) capaces de mantener relaciones........., lo que significa, en términos económicos: capaces de mantener consigo mismos, de algún modo, relaciones «cálculos», análogas a las que se puedan mantener con los demás términos". G.BUENO: Ensayo sobre las categorías de la Economía Política, Barcelona, 1972, p. 49.

4) ¿Qué tipo de relaciones se dan en los siguientes textos:

a) "La consorte es siempre fiel al marido, como el marido a su consorte". J. SWIFT 3ª, *VI.*

b) "No hay duda de que el marxismo contiene más ideología que el psicoanálisis; que el psicoanálisis contiene mas ideología que la física atómica, y que la física atómica contiene mas ideología que la topología algebraica". WAGENSBERGJ.: Proceso al azar, Barcelona, 1986, p. 16.

c) "Cuando el cuerpo está enfermo, el alma puede reconocerlo, saberlo y juzgarlo, pero cuando el alma está enferma, el cuerpo no podrá decirnos nada sobre ella". CICERÓN: Tusculanas, III, 1,1.

d) "Los jansenistas estaban contra la razón, pero la razón estaba de su parte; los jesuitas, en cambio, defendían la razón, pero la razón no los defendía". KOLAKOWSKI,L: Vigencia y caducidad de las tradiciones cristianas, Buenos Aires, 1971, p. SO.

5) ¿Qué tipo de aplicación se establece en el siguiente texto? Trátese de representarla mediante una gráfica:

"¿Sabes que hay necesariamente tantas especies de caracteres humanos como de regímenes políticos? ¿O acaso piensas que los regímenes políticos nacen de una encina o de piedras, y no del comportamiento de aquellos ciudadanos que, al inclinarse hacia un lado, arrastran allí a todos los demás? (...) Por consiguiente, si las clases de Estados son cinco, también han de ser cinco las modalidades de las almas de los individuos (...) Ahora bien, al hombre similar a la aristocracia ya lo hemos descrito, y dijimos que era bueno y justo (...) Después de él hemos de pasar revista a los hombres inferiores, al amante del triunfo y del honor, conforme a la constitución espartana, luego al oligárquico, al democrático y al tiránico?". PLATÓN: La República, 544e-545a.

6) Formalícese la reflexión que MANDELBROT hace de su vida: "A menudo, al oír la lista de mis pasadas ocupaciones, llego a *dudar de mi existencia. La intersección de tales conjuntos está indudablemente vacía", cf. en GLEICK: Caos, 1988, p. 94.*

7) Dados los conjuntos: A = {x,y,z} y B = {X,Y,Z}, y la relación R = {(x,X), (y, Y), (z,Z)} en el conjunto A x B:

i) Especificar el dominio y el recorrido de R. ii) Especificar R^{-1}. iii) Interpretar R y R^{-1}, si x=Sócrates, y = Aristóteles y z = Sartre; X = Xanti-pa, Y = Pitia y Z = Simone de Beauvoir.

8) ¿Qué propiedad lógica contiene el siguiente comentario? "Si un individuo se define como algo único, de suerte que nadie puede ser como él, y todos los individuos se *definen como algo único, entonces ya hay algo que no es único, sino común a todos: que cada uno es único". De conversaciones con Lara, mi hija.*

CAPITULO 2. CONCEPTOS DE TOPOLOGÍA: LA VISIÓN «TOPOLÓGICA»

Thom ha rechazado la vía formalista -que tan sólo nos enseña lo inútil que es investigar en ciertas direcciones- y ha dado la vuelta al programa de investigación conjuntista. En vez de partir de lo *numerable* y, mediante un proceso de formalización, acceder al *continuo,* se tomará como entidad ontológica primitiva el continuo, y lo Infinito Numerable se habrá de justificar por su inmersión en el continuo. Thom demuestra que los números reales se definen como *números de rotación sobre el toro [cf. infra]* sin necesidad de partir de los naturales, que parece el camino seguido no sólo por el sentido común, sino por la mismísima divinidad, si hacemos caso de la máxima del algebrista Kronecker: *«Dios creó los números; el resto es obra de los hombres».* Este cambio conceptual exige la familiarización con una herramienta diferente de la Lógica Formal como lo es la Topología, que trata de las configuración de las formas con independencia de la métrica. Un análisis topológico tiene, por tanto, un contenido *cualitativo.* No queremos decir, en cualquier caso, que la Topología sea la disciplina más avanzada de la Geometría, ni que sea la más abstracta, incluida la Lógica, y que, por tanto, en ella deban apoyarse todas las demás ramas de las matemáticas, dadas su simplicidad y generalidad. La Topología, simplemente, es una manera distinta de enfrentarse con la fundamentación matemática.

Este capítulo puede parecer, y seguramente lo es, muy pretencioso. Pero no lo es más que el uso tradicional de la Lógica como fundamento de otros saberes. La Lógica ha venido presentándose no tanto como un saber, en el sentido estoico, sino como una introducción, un *organon* en el sentido aristotélico. La hipótesis que se empieza a intuir es la de que, así como el siglo XX comenzó con la construcción de la Lógica y los Sistemas Formales y desarrolló gran parte de sus posibilidades, el siglo XXI se va a iniciar utilizando la Topología como *organon,* desplegando virtualidades que se encuentran en Aristóteles -¡y luego en Leibniz!-, quien inauguró tanto la vía de la racionalidad lógica como la vía de la racionalidad morfológica de lo real -la realidad para Aristóteles era, fundamentalmente, cuerpos en movimiento- aunque por razones históricas -contingentes, sí, pero *singulares* y plenas de necesidad interna- sólo se continuaron las primeras, ya por falta de herramientas matemáticas adecuadas, ya por una represión deliberada del momento morfológico a expensas de la Retórica.

El espacio topológico estudia los *entornos* y esto exige dotar a los conjuntos de un *espacio-sustrato* del que carecen en la presentación del capítulo 1. Hay que acostumbrarse a las entidades matemáticas inmersas en espacios de muchas dimensiones, y cuyo «aparecer» se lleva a cabo mediante proyecciones, secciones, cortes, etc. Habremos de habituarnos, pues, a la transformación de objetos y a las aplicaciones de espacios n-dimensionales en esferas, superficies o rectas.

2.1. CONCEPTOS de TOPOLOGÍA:

Se entiende por *Configuraciones Geométricas* diferentes sub-conjuntos de la recta, plano o espacio euclídeos organizados en un sistema de referencia que, en principio, es definido según el sistema de coordenadas cartesianas: $R=R^1$ o recta numérica; R^2 o plano; R^3 o espacio tridimensional, que pueden generalizarse a espacios de n dimensiones, R^n. Estos subconjuntos pueden conectarse por medio de *funciones* [Cap. 1], Además de poner en correspondencia números, o puntos de la recta real, se pueden relacionar superficies, cuerpos, etc. Por ejemplo, se puede establecer una función -llamada *traslación*- de un plano, f: R^2 —> R^2, de tal forma que los puntos de la superficie realicen un movimiento rígido y uniforme. Junto a la *rotación,* que mueve un punto bajo un ángulo 8, y junto a la *simetría,* que, dada una recta, refleja los puntos del plano como si se hubiera situado un espejo a lo largo de la recta, constituye el grupo de transformaciones llamadas *isomerías,* que dejan invariantes las distancias entre dos puntos cualesquiera. La *semejanza* (contracciones y separaciones) o la *proyección* son otras tantas transformaciones. Pero las funciones no siempre han de dar cuenta de las configuraciones geométricas, ya que éstas son generalmente: a) Rígidas; pero nos interesan también cuerpos deformados, incluidos aquellos que se deforman aún más cuando alteran su posición, b) Dadas como un todo: triángulos, círculos, etc. Claro está que podemos interesarnos por alguna parte de la figura geométrica; por ejemplo, queremos saber qué ocurre alrededor de un punto; es un conocimiento, en consecuencia, *local;* c) En ocasiones, nuestra intención puede ir más allá, y se admitirán cortes, siempre y cuando se vuelvan a unir los bordes del cuerpo después de la deformación.

Esto nos obliga a dirigirnos a la *Topología,* que habrá de enseñarnos a comprender las formas geométricas a las que hemos eliminado propiedades tan «naturales» como tamaño, longitud, área y volumen. Entonces ¿qué queda? La respuesta no puede ser demasiado precisa: lo permanente de lo que no es permanente. Y ¿cómo se accede a lo que permanece? La respuesta ahora sí es precisa: mediante transformaciones continuas. Habremos de explicitar las propiedades de las *transformaciones topológicas:*

i) La *Biunivocidacl:* En una transformación topológica no hay rupturas, ni fusiones (se dice que la topología es la geometría de la *plastilina,* de las deformaciones elásticas) y sus correspondencias son de uno a uno (unívocas). Las operaciones a las que los cuerpos son sometidos pueden ser muy complicadas: estiramientos, contracciones, retorcimientos, etc, pero se nos prohibe rotundamente unir dos puntos en uno: si dos puntos están «próximos», tras la función han de quedar «próximos»; si «internos», «internos»; si «fronterizos», «fronterizos»; etc.

ii) *La Continuidad:* Toda transformación que se realice sobre una forma no puede destruir la adyacencia o contigüidad de las distintas partes de una figura. De ahí que uno de los conceptos claves sea el de *continuidad:* una *función continua* conserva todas las adyacencias y no crea otras nuevas.

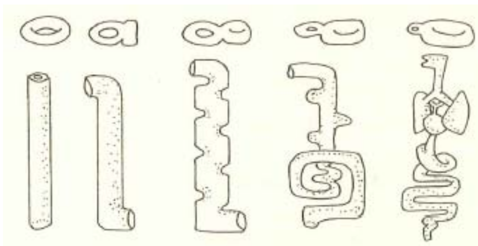


Fig. 2.1 Ejemplo de «toro» y su asociado el «cuerpo humano»

iii) *Las Invariantes topológicas:* En consecuencia, tras múltiples deformaciones continuas *se conservan* determinadas propiedades que, técnicamente, se llaman invariantes topológicas u *homeomorfismos.* Cuando dos o más objetos poseen las mismas propiedades se llaman *homeomorfos.* Por ejemplo, una esfera y una barra de pan. Siempre se podría decir que una barra de pan tiene burbujas de aire y no es ya, por tanto, homeomorfa a la esfera. Ciertamente; entonces nuestra topología se va haciendo más *fina:* para unos casos sería suficiente considerarla como una esfera; para otros como una variedad de n agujeros. Otro ejemplo: un toro o neumático es homeomorfo a una taza, pero también, lo que puede ser más sorprendente, al cuerpo animal y humano si lo «vemos» como un largo tubo con un número pequeño de deformaciones donde tienen lugar las funciones vitales: digestión, respiración, circulación, etc. [Fig. 2.1.]

Las propiedades que estudia la topología no son las mismas que estudia la geometría euclídea, porque se pierden las propiedades métricas y proyectivas; sólo las propiedades topológicas permanecen inalterables. Para un topólogo, una curva y una recta son equivalentes, así como un círculo y un triángulo. ¿A qué tipo de propiedades invariantes nos referimos? Pongamos algunos ejemplos:

a) Poseer uno, dos, tres... agujeros. Por más distorsiones que se realicen, el/los agujero/s persisten. Esta propiedad es tan importante que caracteriza el género de una superficie: cada dos agujeros pueden unirse mediante un «asa» y se hablará de superficies de una, dos, tres... asas,

b) Poseer una, dos, tres... aristas, etc.

c) Mantener la orientabilidad.

d) La dimensión de un conjunto, e) El caso paradigmático es el de la característica de Euler: dado un poliedro cualquiera, el número de vértices V, menos el número de aristas A y caras C, según la ecuación: **V-A+C,** permanece constante, etc.

El *Espacio Topológico* es una especie de figura geométrica que posee una estructura llamada *topología,* la cual permite estudiar la ¡dea de *continuidad.* Los espacios topológicos son equivalentes si se puede pasar de uno a otro, y volver al primero, de manera continua. Los Espacios topológicos de la figura 2.2 nos pueden servir de modelos.

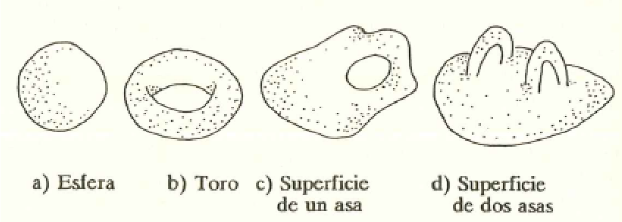


Fig. 2.2 Espacios topológicos

Definiremos una transformación topológica, f: U -> V si:

1) f es una biyección uno a uno; 2) f es continua; 3) la función inversa $f"^{1}$ es continua. Por ejemplo: si reunimos dos medias naranjas, la función es continua, porque los puntos próximos siguen estando próximos. Pero su inversa no lo es, porque si cortamos ahora la naranja en dos mitades los puntos dejan de estar próximos. Otros espacios topológicos más complicados son: la banda de Móbius, la botella de Klein, la Esfera con cofia, etc.[1]

Para tratar los invariantes topológicos vamos a establecer las definiciones de: *entorno, conjuntos abierto y cerrado, puntos adherentes* y las propiedades topológicas de los intervalos cerrados: i) *densidad,* ii) *compacidad y* iii) *conexión.*

Una Estructura topológica se define en un espacio E ^conjunto de puntos) asignando a cada punto x de E una colección de partes de E -llamada *entornos* de x-, que cumple determinados requisitos.

Entorno

Es el concepto básico; imaginemos un punto en un espacio *E.* Acostumbrados a la definición euclídea de que un punto no tiene dimensión y al concepto newtoniano del espacio homogéneo e isótropo, parece poco interesante. Un punto es... como cualquier otro punto e indiscernible de cualquier otro. ¡Si ni siquiera posee dimensión! Pero, acercándonos al punto de otra manera, descubriremos que éste puede ser un cajón de sorpresas. Porque habrá puntos, sin duda, poco interesantes, pero habrá otros sorprendentes. También las chozas de los pastores de la Sierra de Gredos son todas más o menos ¡guales. Pero ¿qué habríamos de decir de aquella choza de pastores de la montaña con un tejado que vierte aguas, las unas al Duero y las otras al Tajo?

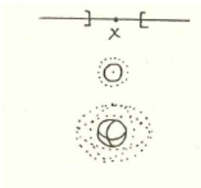


Fig. 2.3 Entornos

Definición 2.1. *Un entorno de x en U y de radio r es el conjunto de todos los puntos de U cuya distancia a U es menor de r. Se simboliza por:* $\mathscr{C}(_{x,r,U})$.

Ejemplos: En R^1, el entorno $\mathscr{C}(_{x,r,}\ R^1)$ es el intervalo abierto (x-r, x+r) de punto medio x y longitud r. En R^2, el entorno $\mathscr{C}(_{x,r,}\ R^2)$ es el círculo con centro x y radio r. En R^3, el entorno $\mathscr{C}(_{x,r,}\ R^3)$ es la esfera con centro en x y radio r. El conjunto U(x, $\mathscr{C}$) se denomina bola abierta [Fig. 2.3]

La característica de una *deformación elástica* puede entenderse, entonces, como el entorno o «proximidad» de un punto en el que tienen lugar modificaciones no esenciales.

Conjuntos Abierto y Cerrado

Con la ayuda de «entorno» se llega al concepto central de «conjunto abierto».

Definición 2.2. *Un subconjunto* $V \subset$ c *U se denomina «abierto» de x, si para cada punto x de V existe algún entorno de x en U, contenido en V. La condición es, por tanto, que para cada* $x \in V$*, exista un número r>0 tal que* $\mathscr{C}(_{z,r,}\ \mathrm{U}) \subset V$.

Ejemplos de conjuntos abiertos: a) Cualquier entorno, b) La recta real R, ya que todo intervalo es un subconjunto de R. c) Un círculo sin circunferencia exterior, c) El espacio entero. La propiedad de ser abierto es relativa al espacio en el que se considera incluido. V. gr., el caso c) es abierto si se considera perteneciente a R^2, pero no sería abierto en R^3.

Los conjuntos abiertos son, por así decir, muy «delicados» y, para lo que aquí nos concierne, esto significa que pueden dejar de serlo mediante una alteración muy pequeña. Por ejemplo, un polígono es un abierto; pero un punto en su exterior o en su interior hace que el polígono deje de serlo.

Definición 2.3. *Un subconjunto V se llama «cerrado» si su complementario en U es un conjunto abierto de U. Si V* es *cerrado, entonces U-Ves abierto.*

Dado un conjunto U, el más pequeño de los conjuntos cerrados que lo contiene se llama *clausura* de U y se denota por $\hat{U}$. Por tanto, U es cerrado, si U=$\hat{U}$.

Un intervalo *abierto* se denota por medio de paréntesis y uno *cerrado* por corchetes. Así, el intervalo (a,b) de la recta real, R, es un abierto y [a,b], un cerrado. No todos los conjuntos han de ser abiertos o cerrados. Hay conjuntos que no son ni lo uno ni lo otro. V. gr.: el intervalo semiabierto (a,b] no es ni abierto ni cerrado, porque cualquier punto x de (a,b] distinto de b existe algún entorno de x contenido en el intervalo, pero todo entorno de b contiene puntos que ya no son de (a,b]. Otros ejemplos: el conjunto de los números racionales; un círculo cuya primera mitad contenga la circunferencia y cuya segunda mitad no la contenga.

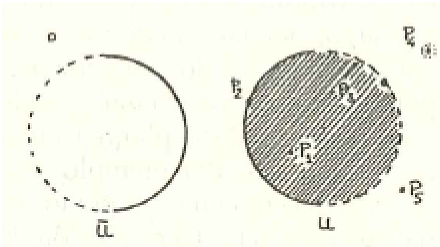
Puntos adherentes y exteriores

1. Se denomina puntos adherentes (adU) a *U,* a aquellos puntos del espacio tales que todo entorno suyo contiene al menos un punto de *U,* i.e., que pertenecen a la clausura de A.

Los puntos adherentes se dividen en:

1.1. Puntos *interiores* **(intU),** aquellos en que existe un entorno contenido enteramente en U.

1.2. Puntos *frontera,* (o *borde)* (frU) aquellos xcuyo entorno tiene puntos de U y de su complementario *U.* Estos, a pueden ser:



P_1 = Interior $\quad$ P_1, P_2, P_3, P_4 = Adherentes
P_5 = Exterior $\quad$ P_1, P_2, P_3 = Acumulación
P_4 = Aislado $\quad$ P_2, P_3, P_4 = Frontera

Fig. 2.4 Puntos adherentes y exteriores

1.2.1. Puntos aislados (aiU), aquellos que poseen un entorno en que ningún punto -salvo ellos mismos- pertenece a U.

1.2.2. Puntos de *acumulación* (acU): Son puntos adherentes no aislados, pues todo conjunto abierto que contenga al punto x contiene un punto diferente de x.

2. Los puntos que no son adherentes se llaman *exteriores* (extU).

Por lo tanto, un espacio topológico E se puede expresar como la unión de los subespacios disyuntas: interior, exterior y frontera. E = adU ∪ extU ∪ intU [Fig. 2.4]. Puede ocurrir que alguna de estas componentes sea vacía dependiendo de la topología ele E. Es interesante observar que los puntos interiores y exteriores forman conjuntos *abiertos,* por lo que el conjunto frontera es *cerrado.*

Propiedades topológicas de los intervalos cerrados

i) *Densidad:* Ya hemos considerado la pregunta de cuántos números reales, R, existen y los problemas a que ha dado lugar [Cap. 1]. La ampliación de las clases de números se realizó por los problemas que iban planteando. Por ejemplo, el descubrimiento de los Irracionales fue uno de esos momentos *singulares* de nuestra historia occidental. Los pitagóricos descubrieron que existían puntos en la recta que no eran racionales. Como puede observarse en la figura 2.5, la raíz cuadrada de 2, que es un número irreductible a una proporción *m/n,* pertenece a la recta, por construcción: trazando mediante compás un arco que va desde el extremo de la diagonal del cuadrado hasta cruzar el eje OX. Pues bien, se dice que los números racionales están *densamente* distribuidos a lo largo de R^1 porque entre dos puntos cualesquiera hay infinitos números distribuidos uniformemente y, sin embargo, quedan «agujeros» por rellenar. Precisamente los números como V2 permitieron conocer cuáles podían ser esos números. Esto plantea cuestiones muy espinosas. Por ejemplo, ¿cuál es la dimensión de Q? ¿Es de dimensión cero como los puntos o segmentos finitos?

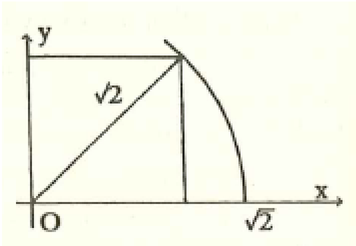


Fig. 2.5 Los irracionales

¿O unidimensional como la recta? La resolución de estas cuestiones ha conducido a la Teoría de Fractales de Manclelbrot, que, en cierto modo, es una investigación paralela a la Teoría de las Catástrofes de Thom, pero con una diferencia esencial: los fractales se desenvuelven en el plano bidimensional, más propio de los minerales y los vegetales, y la TC, en el mundo tridimensional, más propio de los animales.[2]

Definición 2.4. *En general, diremos que si E es un espacio topológico y U y V subespacios de E, entonces V es denso respecto de U si todo punto de V es adherente respecto a U, es decir, si $V \subset U$. Si V = E, entonces se dice que V es denso en todas partes y E=adV.*

ii) *Compacidad:* Si un subconjunto U de R^N está contenido en algún *entorno* suficientemente grande, se dice que está *acotado.* O de otra manera: se dice que un conjunto está estrictamente acotado cuando es posible definir un entorno en U cuyo centro sea el origen y cuyo radio finito contenga a U. Cuando un conjunto es a la vez cerrado y acotado se dice que es *compacto.* Una de las consecuencias de interés para nosotros es que la *hipótesis de compacidad* tiene la función de eliminar la posibilidad de acumulación de los puntos críticos [Véase cap. 4]. Daremos una definición acorde con ese objetivo:

Definición 2.5. *De cualquier colección infinita de conjuntos de X cuya unión es U, podemos seleccionar una subcolección finita cuya unión también es U.*

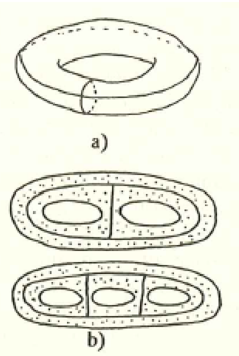


Fig. 2.6 Conexo

iii) *Conexión:* Se dice que un conjunto V de E *es conexo* si dos puntos de *V* pueden unirse mediante un arco (o a lo largo de una trayectoria poligonal) completamente contenido en V. a) Si esta trayectoria puede reducirse a un punto, se dirá *simplemente conexo,* b) Si no se puede reducir a un punto, se dirá *múltiplemente conexo.* Podrá pasarse de b) a a) por medio de cortes [Fig. 2.6]. El *orden de conexión será* el mayor número de curvas cerradas que pueden trazarse sobre una superficie sin que ésta quede dividida. Para la superficie esférica el orden de conexión es cero; para un toro será dos, porque dos son las únicas curvas que no forman una disección [Fig. 2.6a].

Ejemplos: a) Una recta R^1 es un conjunto conexo, b) El complementario de cada punto de R^1 en R^1 no es conexo, es decir, una recta se convierte en no conexa por exclusión de cualquiera de sus puntos. c) Un plano es conexo, pero no es compacto.

Aplicaciones continuas

Una consecuencia de la propiedad de *compacidad es* que si los subespacios X de R^m que son compactos en R^m, para cualquier aplicación continua f: X -> R^m, el conjunto imagen es cerrado y acotado. La conjunción de ambos teoremas nos conduce a un tercero que expresa la propiedad fundamental de la topología, los homeomorfismos:

Teorema 2.1: *Un conjunto U*$\subset$ R^m *y otro conjunto V* $\subset$ R^m *son topológicamente equivalentes u homeomorfos, si existe una función uno a uno h:U -> V tal que h y* h^{-1}: V-> *U son continuas. La función h se denomina «homeomorfismo».*

Esto significa, pues, que los puntos vecinos, tras la transformación, permanecen vecinos y, por ende,.que dos figuras son topológicamente equivalentes si existe un movimiento no-rígido que hace coincidir una de las figuras en la otra. V. gr., una esfera, un esferoide y un cubo son homeomorfos [Fig. 2.7].

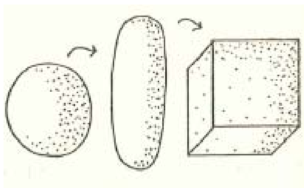


Fig. 2.7 Homeomorfismo

Si el *homeomorfismo* se puede llevar a cabo sin producir pliegues o alisarlos, la función *h* se llamará *difeomorfismo.* Sean aplicaciones del tipo f:U H> R^m, donde *U* es un abierto en R^n. Para hacer esto trabajamos localmente. Supongamos además que f(U)=V. Entonces la aplicación f será un difeomorfismo, siempre que: i) f sea suave, ¡i) f tenga una función inversa tal que g:V -> R^n y tal que f*g=1_v y g*f=1_u. iii) g sea suave. Así por ejemplo, f=x^2 sería difeomorfa sólo para R^+,pero no para R", puesto que su inversa, g=$\sqrt{}$x no tiene valores para R". O bien f= x^3 no es difeomorfa porque su inversa, g=$\sqrt[3]{}$ no es suave. V. gr , una esfera y un esferoide son *difeomorfos,* pero no lo son a un cubo. Intuitivamente el *homeomorfismo* nos ha de permitir transformaciones como las de la figura 2.8.

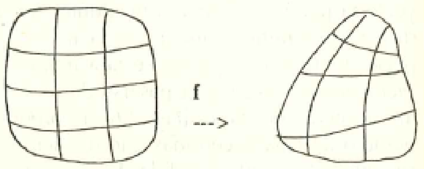


Fig. 2.8 Difeomorfismo

El concepto de Derivada

Para el estudio de una función el conocimiento de la *derivada* es muy importante. Consideremos funciones que se pueden representar como trayectorias en el plano de coordenadas (x, y). Las gráficas pueden ser muy diferentes. Imaginemos una función uniforme, de tal modo que a iguales incrementos de x correspondan ¡guales incrementos de y. La trayectoria es una línea recta. Pero si los incrementos son disformes, entonces a ciertos incrementos de x pueden corresponder pequeños, medianos o grandes incrementos de y. Pues bien, podemos calcular la inclinación de la trayectoria en cada punto, la cual corresponde a su tangente [Fig. 2.9a]. Así que conocer la inclinación de la curva se identifica con conocer la tangente en ese punto. Ahora bien, la derivada no tiene por qué ser una recta. Puede ser una curva que a su vez posea derivada y así sucesivamente [Fig. 2.9b].

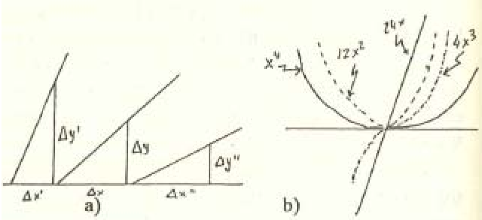


Fig. 2.9 Derivada

Variedades diferenciables

Las variedades generalizan las nociones de *curva y superficie.* Para obtener la descripción global de una variedad la recubrimos con una familia de conjuntos abiertos, cada uno de ellos asociado a un *mapa,* es decir, a un par (U,h), donde U es el subconjunto abierto y h un homeomorfismo. Este permite definir la parte de la variedad según coordenadas; éstas tienen la propiedad de ser, local-mente, euclídeas [Fig. 2.10].

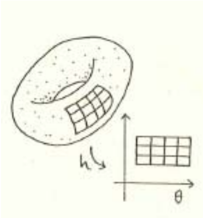


Fig. 2.10 Variedad

Definición 2.6. *Un subconjunto M de R^n se denomina «variedad k-dimensional» si para cada punto x* ∈ *M se cumple la condición:*

Existe un conjunto abierto U que contiene x, otro conjunto abierto V $\subset$ *R^n y un difeomorfismo h:U -> V tal que U$\cap$M es simplemente Rk * {0}. Por tanto, un punto en R^n es una variedad cero-dimensional y el toro, una variedad bi-dimensional.* Lo interesante de las variedades es que son estructuras estrictamente locales. Local-mente, una variedad es un difeomorfismo en R^n, pero no tiene por qué serlo en general, globalmente considerada. Decimos que una variedad es *suave* si es infinitamente diferenciable (Le., que admite derivadas hasta el infinito), y *difeomorfa* si es *homeomorfa* suave, con *inversa* suave. Para que dos funciones f y g sean difeomorfas han de ser tales que permitan la *simetría:* «f y g son del mismo tipo diferencial» y «g y f son del mismo tipo diferencial». Esto exige que sean *inversibles,* i. e., que existan funciones f^{-1} y g^{-1} que satisfagan f^{-1} O f = f O f^{-1} = /R (siendo / = aplicación identidad). De ahí la importancia del Teorema de la Función Inversa [Cap. 4], que permite realizar un cambio de coordenadas en el que la información no es destruida. Los cambios son *suaves y reversibles,* i.e., *difeomorfos.* Pero la inversa exige que la función tenga derivadas de orden *n.* Esta última exigencia nos obliga a tratar con variedades denominadas *analíticas,* que son indefinidamente diferenciables, es decir, que admiten derivadas en todos los órdenes.

Topologías en el espacio funcional

Si la función es continua en *V,* se dice que f pertenece a la clase C°. Si todas las derivadas primeras respecto de una base de E son continuas en *V,* se dice que pertenece a la clase C^1 en V. Cn significa que las funciones admiten derivadas hasta el orden *n* y son continuas y C^{∞}, que son indefinidamente diferenciables. Sobre el espacio funcional F podemos aplicar *varias Topologías* [Fig. 2.11].

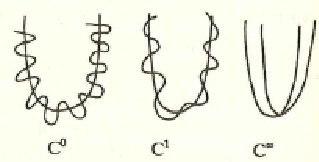


Fig. 2.11 Topologías C^n

Topologías C°: diremos que dos puntos son vecinos si sus valores en cada punto también son vecinos. (Relación débil de vecindad, pues, aunque los valores de las funciones sean idénticos, las primeras derivadas pueden diferir enormemente).

Topologías C^1: si además de ser vecinos en cada punto lo son también sus derivadas primeras: pero las derivadas segundas pueden desviarse fuertemente.

Topologías C^{∞}: los valores de f y de g son vecinos así como sus derivadas de orden $^{\infty}$.

Este nivel *diferenciable es* intermedio entre el nivel *topológico* de las funciones continuas, que pueden ser muy patológicas, y el nivel *algebraico* de las funciones polinómicas. Petitot ha mostrado[3] que este nivel diferenciable es *perceptualmente* pertinente, esto es, pertinente para el *reconocimiento de formas.*

Esto nos conduce a una reflexión de gran importancia para lo que sigue, sobre la propia herramienta matemática y su carácter escritural y/o geométrico. Podemos decir que esta opción es la decisiva: para la validez del conocimiento, ¿es precisa una fundamentación lógica o topológico-geométrica? Se trata de la diferencia básica entre el ser-en-tanto-que-escritural y el ser-en-tanto-que-espacial. Su pertinencia entronca con todo el problema del *logocentrísmo occidental y* la prioridad -no sólo lógica, sino ontológica y epistemológica- concedida a la palabra *escrita.* [Véase Cap. 3].

Las funciones f:R -> R pueden ser entendidas desde dos puntos de vista:

a) Como *Polinomios,* de acuerdo con el ser-en-tanto-que-escrito: Funciones calculables explícitamente a partir de operaciones del álgebra: adición, multiplicación... Son funciones enteras, sumas de series convergentes de raíz de convergencia infinita.

La propiedad característica de los polinomios es la de que, por medio de la Serie de Taylor [véase *infra],* podemos calcular sus derivadas en el punto 0, que determinan la función *globalmente.* Una propiedad adherente al ser-escritural es que el conocimiento local de la función en un único punto basta para determinarla globalmente.

b) Como *Funciones Continuas,* de acuerdo con el ser-en-tanto-que-espacial (geométrico-topológico): Básicamente son las funciones diferenciables. Al contrario que los polinomios, la determinación local no implica la determinación global. La cuestión es determinar si hay alguna manera de salvar esta escisión entre polinomios y funciones continuas, entre lo global y lo local. Pasemos a estudiar la herramienta matemática que permitirá dar este paso.

El Polinomio de Taylor

Hemos de elegir un nivel pertinente de análisis. Éste será el nivel *diferenciable,* pues a las funciones diferenciables se les puede asociar en cada punto un polinomio. Ahora bien, esta escisión entre las funciones enteras, en las que son posibles la construcción de algoritmos -ya que se constituyen como series convergentes-, y el álgebra de las funciones diferenciables, en las que no existe, en general, algoritmo alguno que permita calcular explícitamente el valor f(x) de la función, puede hacerse menos profunda si se analiza por mediación de las Series de Taylor, Le., si a las funciones suaves que pertenecen a C^{∞} se les asocia en cada punto $x \in R$, una serie formal Tf(x) llamada su «serie de Taylor» en x, que es la mejor manera de aproximaciones locales de f en x por polinomios de grado creciente.

Las funciones polinómicas pueden evaluarse por simples operaciones algebraicas.

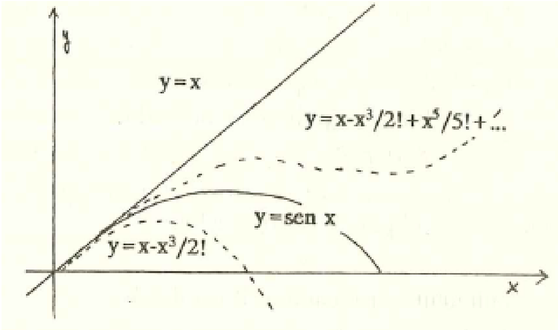


Fig. 2.12 Polinomio de Taylor

Pero muchas otras funciones, incluso funciones elementales como *f(x) = sinx* **o** *g(x)Lnx,* no permiten estrategias tan fáciles. La estrategia usual es utilizar polinomios especiales para calcular «aproximadamente» tales funciones. Para hallar el polinomio de Taylor, P(x) que aproxima su valor a una función f, se exige que en punto determinado a, tanto P como f coincidan en sus valores.

$P(a) = f(a)$

Geométricamente esto significa que la gráfica de P pase por (a,f(a)). Pero se pretende que el polinomio se parezca *(pertinencia perceptual)* a la función. Para ello se puede imponer que las pendientes del polinomio (su derivada) y de la función coincidan. Así:

$P'(a) = f'(a), \quad P''(a) = f''(a), \quad P'''(a) = í'''(a),...$

$P^{n}(a) = P(a). \qquad (2.1)$

Parece plausible sostener que ese polinomio P^n se «asemeja» a la función.

Escribimos el polinomio en la forma usual por comodidad:

$P_n(x) = C_0 + C\text{-}i(x\text{-}a) + C_2(x\text{-}a)^2 + C_3(x\text{-}a)^3 +...+ C_n(x\text{-}a)^n$

Hallemos las derivadas del polinomio según (1):

$P'_n(x) = C_1 + 2C_2(x\text{-}a) + 3C_3(x\text{-}a)^2 + ...+ nC(x\text{-}a)''\text{-}^1$

$P''_n(x) = 2C_2 + 3C_3(x-a) + ... + n(n-1)C_n(x-a)^{n}\text{-}^{2}$

$P^n{}_n(x) =$ $n!C_n$

Si sustituimos el valor de x por el valor de a, se obtiene:

i) por una parte, a-a=0;

¡i) y según (2.1) *f(x)* por *P(x),* entonces el valor de las derivadas se deduce de:

$f'n(x) = C1$, $f''n(x) {}^{=} 2C2$, ... $f^{2}n(x)$=- $n!C_n$, resultando que:

$C_0 = f(a)$, $C_1 = f'(a)$, $C_2 = (1/2!)\ f'''(a)$,

$C_3 = 1/(3!)\ f'''(a)$, $C_n = (1/n!)f''(a)$.

Así se obtiene el polinomio buscado:

$Pn(x) = f(a) + f(a)\{x\text{-}a) + f''(a)(x\text{-}a)7l\ \text{-}2 + ... + f^n(a)(x\text{-}a)\ ^3/n!$

La figura 2.12 muestra con un ejemplo la aproximación a una función por el polinomio de Taylor.

Polinomios truncados o JET orden k

Tradicionalmente, el polinomio de Taylor se ha utilizado para tratar series que convergen en alguna vecindad de un punto. Entonces se dice que la función es *analítica* en ese punto xg. Estas series pueden ser diferenciables término a término en una vecindad y cada coeficiente -C_0, Q...C,.- viene dado por la derivada résima de la función dividida por r! Pero la función no tiene por qué ser analítica. La analiticidad no es condición suficiente, ni necesaria, para que las aproximaciones a un punto sean válidas. Por ejemplo: la serie de Taylor para la función $f(x) = e^{-1}/^{x2}$ cerca del origen tiene la serie de Taylor: $0 + Ox + Ox^2 + Ox^3 + ...$ Aunque no es convergente, sin embargo es una aproximación cualitativa excelente para entender cómo se comporta esa función cerca del origen. Se «ve» que en ese punto es muy plana.

Esta posibilidad permite utilizar la serie de Taylor de una manera muy distinta. Lo que se ha ideado ha sido *truncar* la serie de Taylor y entonces -según la bella metáfora de Zeeman- «la cola no mueve al perro». La clave de esta cuestión es que la función f es equivalente a una de sus partes, llamada *jet,* aunque la serie sea divergente, o no se sepa si lo es o no. Sea la función f tal que: $T_n = f(0) + hf'(O) + h^2f''(0/2!) + ... + h^kf^k(0/n!)$

A T_n se le llama «*jet* de orden *k* de f». Si dos funciones poseen el mismo desarrollo de Taylor, podemos estar seguros de su equivalencia, pues es independiente de las coordenadas elegidas; es una propiedad intrínseca.[4] Se dice que el polinomio P(n) está *truncado* en el orden *k* o que es un *jet* y se escribe $j^k(Px)$. Sea el polinomio $P(n) = 3x-2y+7xy-9x^3+4x^7y^2$; este polinomio equivale al *jeten* el orden tres a: j^{-k} $(Px) = 3x-2y+7xy-9x^3$.

2.2. TOPOLOGÍA Y SISTEMAS DINÁMICOS

Una de las grandes aportaciones de la ciencia del siglo XX ha sido la aplicación de la Topología a los Sistemas Físicos.

Retrato de Fases

Supongamos un sistema mecánico muy simple como un péndulo. La posición viene dada por el ángulo o por un punto del círculo S^1 de radio 1. Su velocidad angular está representada por un número real. Entonces el par: posición, velocidad (x,y), constituye el *espacio de fases* del péndulo que es el producto del círculo S^1 por una recta r, lo que da lugar a un cilindro, según la figura 2.13a-d. Cada movimiento está representado por una curva orientada (si está inmóvil será un punto) trazada sobre el cilindro y parametrizado por el tiempo. Se dice que el *retrato de fases* es el conjunto de órbitas o curvas integrales cuya representación se obtiene al mover el cilindro como si fuera un rodillo sobre una superficie [Fig. 2.13d].

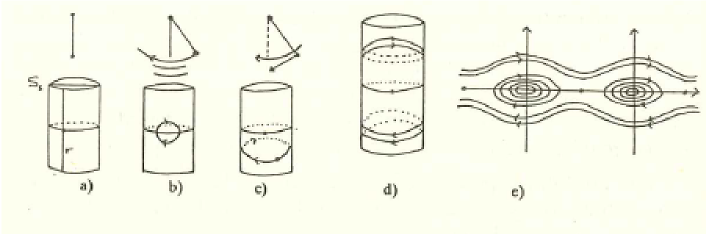


Fig. 2.13 Retrato de Fases

Si el sistema mecánico aumenta su grado de libertad, es decir, el número de coordenadas que nos permiten enunciar la posición de un punto, entonces el número de dimensiones del espacio de fases aumenta hasta hacerse inmanejable por los métodos ususales. Pues bien, muchas de las características de un sistema mecánico se pueden expresar en términos de las propiedades topológicas de su espacio de fases.

Un Sistema Dinámico en Mecánica clásica (Newton-Lagrange-Hamilton) se describe mediante un sistema de ecuaciones diferenciales. Sea, por ejemplo, la ecuación de Newton: d^2x/dt^2= (F, x, *dx/dt,t),* que significa que la tasa con que varía un objeto (la segunda derivada o *aceleración)* depende de la tasa de variación del objeto (primera derivada o *velocidad).* Un Sistema Dinámico puede representarse de dos maneras equivalentes: diferencial (vectorial) o integral.

i) Desde un punto de vista geométrico y diferencial, tratar esta ecuación significa que cada punto de la variedad M se define por un vector que tiene una dirección; entonces se obtiene un conjunto de vectores tangentes a la superficie o direcciones que describe la variedad [Fig. 2.14a].

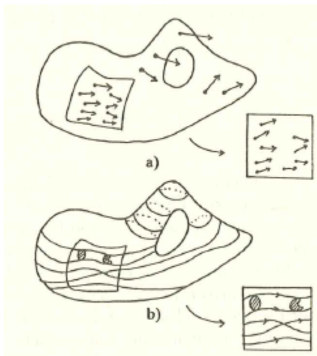


Fig. 2.14 Vectores y curvas integrales

i¡) Desde un punto de vista integral, la variedad M se divide en un conjunto de curvas integrales que no pueden cortarse dos a dos y que llenan el espacio de fases dado, de forma que en cada punto de la variedad hay una única curva integral que pasa por ese punto y representa posibles movimientos del sistema [Fig. 2.14b].

Entonces ocurre que por cada punto de la variedad (x, y) pasa una sola curva... excepto en algunos puntos. Fue Poincaré (1854-1912) quien inició el estudio sistemático del número, carácter y posición

relativos a estos puntos, que llamaremos «singulares», como un apartado de la teoría cualitativa de ecuaciones diferenciales, la cual tiene por objeto la Topología del campo de direcciones y el sistema de curvas integrales de la ecuación diferencial dada. Demostró que solamente hay unos pocos tipos genéricos de puntos singulares. Sea el sistema:

$dx/dt = a1X + b1y$

$dy/dt = a2^X + b2y \quad 1)$

y busquemos sus puntos singulares. Entre los diversos criterios de clasificación de los puntos singulares uno de ellos es el de buscar simplemente los distintos tipos de raíces de la ecuación (1). Si las soluciones del sistema son:

$x = Ae^{mt}; y = Be^{mt}$

sustituyendo en (1) se obtiene la ecuación característica:

$m^2 - (a1+b2)m + (a1\ b2 - a1\ b1)=0$

Se demuestra que las propiedades del punto crítico (0,0) del sistema (1) se determina por los números m-) y m_2 de la ecuación. Entonces habrá que considerar la naturaleza de las raíces: si son reales positivas o negativas, complejas o imaginarias. El único caso des-cartable es el m = 0, pues entonces a1 b2 = a2 b1.

1 .a. Si las raíces son reales, desiguales y negativas, nos indican que todas las trayectorias tienden hacia el punto crítico y a éste lo denominamos «Nodo sumidero».

1 ,b. Raíces reales, desiguales y positivas nos indican que todas las trayectorias se alejan de ese punto crítico, al que se denomina «Nodo fuente».

2. Si las raíces reales son de signo opuesto, las trayectorias sobre el eje x se aproximan al punto crítico, mientras que el resto de trayectorias se alejan al infinito. A este punto lo conocemos como «Punto-Silla».

3. Si las raíces son complejas y la parte real φ de la solución: $r = \varphi \pm \iota\mu$ es menor que cero, el movimiento de las trayectorias tiende al punto crítico y se llama «Punto-Espiral» *(sumidero);* si es menor que cero, se aleja de él y se llama «Punto-Espiral» *(fuente);* si φ =0, entonces el movimiento es periódico en el tiempo y las trayectorias son curvas cerradas sobre el punto crítico, que se llamará «Punto-Centro».

Autovalores

Una clase de transformaciones especialmente notable es aquella en la que con motivo de una transformación los vectores quedan multiplicados por los números llamados *autovalores* $\lambda_1,\ldots, \lambda_m$, y que escribimos en una *matriz diagonal:*

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_m \end{vmatrix}$$

Un vector X (≠O) que se transforma en un vector λX recibe el nombre de «eigenvector» o «autovector» de la transformación. Un auto-vector X es una transformación lineal A si y sólo si AX= λX[6] El conocimiento de los autovalores se hace fundamental para la consideración de los sistemas dinámicos. Un ejemplo muy curioso, que nos puede hacer intuitivo este concepto, es el del paso de un grupo de soldados por un puente. El jefe que los manda interrumpe el paso militar para continuar normalmente; esto se debe a que puede ocurrir que marchen con frecuencia igual a uno de los autovalores del puente y esto produciría oscilaciones que podrían llegar incluso a romperlo. Cualquier ingeniero intentará que la frecuencia natural de su puente esté muy lejos, pongamos por caso, de la del viento en la zona donde se está construyendo. La interpretación geométrica de los autovalores es muy interesante: si todas las soluciones son *positivas,* pueden interpretarse como una *dilatación.* Si alguna es *negativa,* entonces el espacio se deforma a la par que hay un *cambio de dirección.* Si algún *X* es cero, hay *deformaciones* en esa dirección. Pues bien, para el caso que nos ocupa tendremos en cuenta la siguiente correspondencia:

1 .a. *Nodo sumidero:* los autovalores, λ, del sistema son negativos.

1 .b. *Nodo fuente:* los autovalores, λ, del sistema son positivos.

2. *Punto-Silla:* un autovalor es positivo y otro negativo.

3.a. *Punto-Espiral (sumidero):* los autovalores son complejos conjugados con la parte real negativa

3.b. *Punto-Espiral (fuente):* los autovalores son complejos conjugados con la parte real positiva.

4. *Punto-Centro:* los autovalores son imaginarios puros.

Podemos hablar, por consiguiente, de la *estabilidad de* un sistema, por relación a los puntos críticos. Si las trayectorias tienden al origen, al punto (0,0) se dice que el sistema posee una «estabilidad asintótica» *(nodo-sumidero, espiral-sumidero, silla).* Si no se acercan al punto crítico, ni se alejan de él, el sistema es «estable» *(centró).* Si las trayectorias tienden al infinito, «inestable» *(nodo-fuente, espiral-fuente, silla)* [Fig. 2.15].

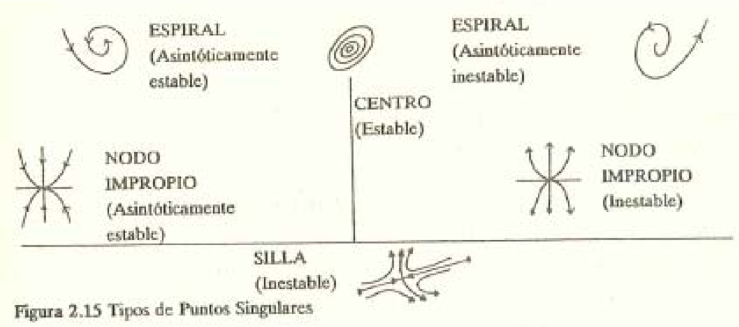


Figura 2.15 Tipos de Puntos Singulares

Se trata, por consiguiente, de estudiar la topología del campo de direcciones del Sistema Dinámico.

***

El vínculo entre los puntos *singulares* y la *estabilidad* fue utilizado muy eficazmente por Poincaré al tratar de resolver el problema de la estabilidad del sistema solar. Para acometer esta cuestión y distinguir trayectorias, Poincaré ofreció un sorprendente y eficaz método, a la par que muy distinto a los usuales en la época. Supongamos un sistema con dos grados de libertad que en un momento determinado se encuentra en un estado y que en otro vuelve al mismo lugar del que ha partido. En vez de estudiar esa trayectoria -persiguiéndola por todos los puntos por los que pasa-, podemos construir un plano π, llamado **Sección** de **Poincaré** (con lo que se reduce en una unidad la dimensión necesaria para su representación), por un punto dado transversal a él y esperamos a ver qué ocurre en los siguientes momentos en los que pase por ahí. Si siempre pasa por el mismo punto se dirá que la órbita tiene soluciones «T-periódicas»; por ejemplo, la órbita de la tierra respecto dei sol es periódica con un período T de un año. Si no coincide exactamente pero se mantiene en el interior de un toro, se llaman «cuasi-periódicas». Si las trayectorias llenan el plano (o salen de él y luego vuelven, de manera aleatoria), se dirá que son «caóticas». De este modo, en vez de estudiarse una trayectoria en tres dimensiones, se estudia un plano bi-dimensional, en el que se recogen los impactos que las trayectorias marcan sobre el plano cada vez que lo atraviesan [Fig. 2.16].

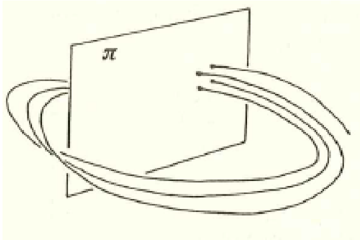


Fig. 2.16 Superficie de Poincaré

Este *regressus* condujo a Poincaré desde los métodos *cuantitativos* a los métodos *cualitativos,* con lo que puso a la investigación en otro camino, que, sin duda, más sutil y menos radical, comienza a ver sus frutos a partir de la década de los sesenta. Como dice Ekeland: *"El límite de lo Cuantificable no es el límite de las matemáticas: por métodos nuevos, cualitativos más que cuantitativos, se buscará no tanto hacer predicciones exactas, como dar una idea general de las posibles".*

2.3. EL TEOREMA DE TRANSVERSALIDAD DE THOM

Estos métodos inaugurados por Poincaré nos ponen en el camino de la TC de Thom, que ha proseguido la investigación de estos cortes, de estas intersecciones, de estos choques, pero generalizando la superficie de Poincaré a variedades n-dimensionales. La ¡dea es la siguiente: los sistemas inestables pueden ser estabilizados mediante una pequeña deformación. Esto es lo que ocurre cuando utilizarnos un medicamento para eliminar la fiebre, pongamos por caso, y hacer que vuelva al organismo a su estado anterior. Pues bien, la estabilidad se asocia a un concepto geométrico y topológico que ha sido utilizado por Thom muy eficazmente: la *transversalidad,* que, como dice Chenciner[9], es un *generador de estabilidad estructural.* (Ello exige un conocimiento matemático muy profundo y precisamente las dificultades matemáticas de la TC proceden de este concepto. Como es obvio, no tratamos aquí de dilucidarlo, sino de exponerlo en sus componentes intuitivos).

i) Comencemos por su definición conceptual: las curvas y las superficies, pongamos por caso, son soluciones de *sistemas de ecuaciones.* Desde Descartes conocemos las correspondencias entre el álgebra y la geometría. Se sabe que: Un número mayor de ecuaciones que incógnitas significa, *generalmente,* que no existe solución. Y como un corolario del anterior teorema: «n ecuaciones con *n* incógnitas, *generalmente,* tiene soluciones aisladas». Teorema y corolario son verdaderos, en general, pero no siempre. Existen casos excepcionales que ocurren bajo condiciones específicas. Thom ha introducido el concepto topológico de «genérico» para reemplazar el ambiguo y más intuitivo «generalmente» o «casi todo».

ii) Ahora expondremos este concepto *geométricamente* para el caso en que una variedad atraviese otra variedad[10]: Sean U ∩ V dos variedades de dimensiones s y t respectivamente. Entonces U∩Vse intersectan transversamente síi:

1) O bien la intersección U ∩ V es nula, i.e., no ¡ntersectan en absoluto: U y V son disyuntas, U ∩ V = 0. Esto significa que no se puede llenar el «espacio ambiente» sumando las subvariedades U y V. Se dice que U y V «se evitan».

2) O bien sí intersectan, y se encuentran en un subespacio cuya dimensión es tan pequeña como sea posible. La dimensión mínima viene dada por la fórmula: el máximo del par *(max):* (0, s+t≥n).

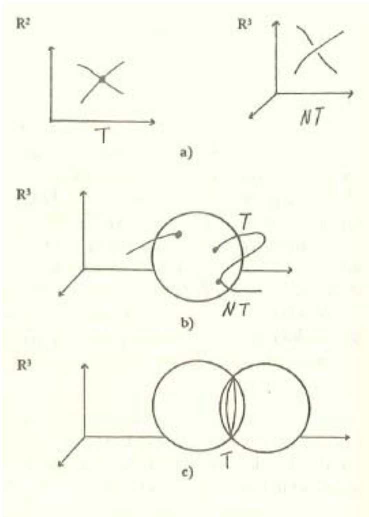


Fig. 2.17 Transversalidad

Ejemplos:

a) En R^3, dos curvas son transversales si no se intersectan; supongamos que lo hacen: entonces según la condición (0, s+t-n), habrá *max{0,* 1+1-3) y, por tanto, tendrían que encontrarse en un punto. Pero se vulnera porque la intersección $U \cap V = 0$, y, sin embargo, U nV sí 1 +1 -3 = -1. En R^2, por el contrario, serían transversales, ya que $U \cap V = 1+1-2 = 0$. O, dicho de otra manera; si s+t<n, las variedades U y V sólo son transversales si son disyuntas. [Fig. 2.17a].

b) En R^3 una *curva* y una *superficie* son transversales si no son tangentes en ningún punto. I.e., si s+t=n, entonces son transversales si sus lugares de intersección son puntos aislados. [Fig. 2.17b].

c) Dos superficies esféricas son transversales si la dimensión de la intersección es igual al exceso s+t-n = 2+2-3 = 1. Por tanto, se ¡ntersec-tan en una curva [Fig. 2.17c].

iii) La transversalidad también se define para *funciones.* A veces resulta de interés no solamente tener en cuenta cómo son transversales las variedades, sino conocer la velocidad a la que se ¡ntersectan esas variedades. Si consideramos que una curva C está parametrizada en el plano, tal que C: R -> R^2, podemos pensar en el *tiempo* como un parámetro y en la curva como un punto moviéndose. Entonces, cuando C se intersecta con C, para que sea transversal no puede ser cero. ¿Por qué?

Si C´ es el eje de ordenadas y C(t) el punto $(t^3,0)$, entonces la imagen de C es justamente el eje x, que es transversal a C Perturbando un poco C, tal como $(t^3 - \in x)$, para e positivo, obtenemos un trazo que cruza C tres veces en vez de una, y esto es cualitativamente diferente. Esto ocurre cuando la velocidad $(d/dt\ t^3 l_0,0)$ de C al cruzar C es cero. Diremos que en R^2 dos *curvas* son transversales si no tienen la misma tangente en un punto. Las curvas y=0, $y=x^3$ en R^2, tienen las dos tangentes coincidentes. Supongamos C y C, que son tangentes en x. Por pequeñas deformaciones se puede hacer explotar el punto de tangente en un cierto número de intersecciones transversales [Fig. 2.18].

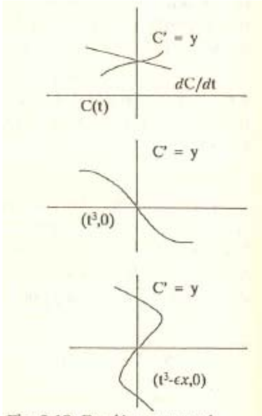


Fig. 2.18. Función transversal

En general, diremos que si f: R^m -> R^n es una aplicación de clase C^1 (con *m<n)* y si W es una subvariedad de dimensión s de R^n, se dice que f es transversal en x $\in R^m$ a la subvariedad:

En general, diremos que si f: R^m -> R^n es una aplicación de clase C^1 (con *m<n)* y si W es una subvariedad de dimensión s de R^n, se dice que f es transversal en x *e* R^m a la subvariedad:

1) O bien y=f(x) $\notin$ W;

2) O bien, y=f(x) $\in$ W, y la imagen para la derivada de df(x) de R^m de N (espacio tangente en y a la imagen f(R^m)) es de rango máximo, es decir, engendra con el plano tangente en y a W, el espacio R^n todo entero. Por ejemplo:

Sea U una recta R^1 **y** sea W el eje x en el plano R^2. Se define una aplicación f tal que:

t $\in$ R1-> (f1(t),(f2(t))=(t+1, $(t-1)^4$) $\in R^2$

Hay entonces un punto de contacto en x_0=(2,0). El espacio tangente a W en (2,0) tiene el vector base (1,0). El espacio tangente a W a f(R^1) en x_0 tiene un vector tangente en:

d/dt((f₁ (t), (f₂(Ú) $l_{t=1}$ = (1,4(1-1)3) $l_{t=1}$ = (1,0)

Los dos vectores tangentes son paralelos, por lo que no llenan el plano R^2 en (2,0). Una pequeña perturbación de la aplicación f hará a la aplicación transversal al cruzar el eje x en cuatro, dos o ningún punto [Fig. 2.19],

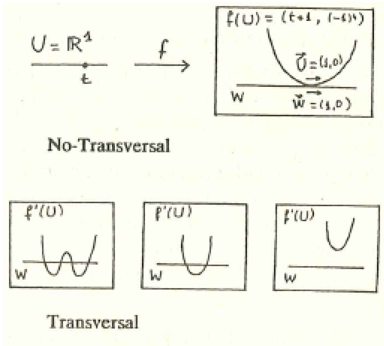


Fig. 2.19 Función trasversal

Propiedades de la Transversalidad

i) Es *estable:* constituye un generador de estabilidad estructural. Una perturbación arbitraria no afecta a las propiedades cualitativas; por eso la *inestabilidad* puede definirse como falta de transversalidad.

¡i) Es *genérica:* toda inestabilidad puede eliminarse por pequeña deformación. Un elemento del sistema puede ser aproximado arbitrariamente mediante elementos que poseen esa propiedad.

iii) Es *típica:* esto significa que si tomamos dos variedades al azar, es infinitamente improbable que se intersecten no transversalmente.

iv) Además, preserva la imagen recíproca de la estructura de variedad de las subvariedades del objeto de una aplicación, así como su *codimensión* [Véase *infra].*

El Lenguaje *topológico* de la transversalidad

Para las variedades, el lenguaje que hay que usar es topológico, pues no basta el geométrico. Como estamos trabajando con familias de funciones, y de perturbaciones (locales) de funciones, tenemos que saber lo que ocurre en la vecindad de un punto.

¿Todas las trayectorias de esa vecindad -podemos preguntarnos- son equivalentes o alguna no lo es? En este último caso, ¿puede hacerse equivalente, mediante algún cambio de coordenadas, de tal manera que se estabilice y no perturbe al estado de la familia en ese punto? ¿Puede, por consiguiente, una función inestable ser estabilizada?

El lenguaje de la topología, al desvincular los objetos genéricos de la métrica, permite asignar a cada punto u de un conjunto U un sistema de *entornos.* Como los puntos varían según parámetros, es fundamental conocer su comportamiento cualitativo de esos puntos. Sea un conjunto abierto U -cuyos puntos poseen un entorno- y el cerrado U -su complementario- e interesémonos por los puntos *frontera.* Para encontrarlos se buscan conjuntos abiertos que además sean *densos,* esto es, aquellos cuyo complemento contenga un entorno que intersecte con él. Thom demuestra que la propiedad de Estabilidad Estructural es *genérica,* esto es, *abierta y densa* a la vez en el espacio de las aplicaciones cliferenciables propias de una variedad en otra. Por ser *abierta,* si se perturba ligeramente uno de sus elementos se obtiene un elemento del espacio en el que se trabaja. Por ser *densa,* todo elemento de ese espacio está arbitrariamente próximo a otro elemento de ese espacio. Esto significa que toda inestabilidad es eliminable por peque-

ñas deformaciones. Es en este lenguaje topológico donde se ha demostrado el denominado *Teorema de Thom*[u]*:*

Teorema 2.2: *Sea M una variedad compacta y* X *una subvariedad cerrada del espacio de los jets j-(M,R); entonces, el conjunto f eFtal que jkf sea transversal a J, es un abierto denso de F.*

Los elementos transversales a la estratificación de *N* forman un abierto, denso. V. gr., sea una superficie S en un toro T en R^3. Definimos una relación de equivalencia, R, [cap. 1] sobre aplicaciones f: R^2 -> R^3, y la representamos por xRy si existe un difeomorfismo de $x^{-1}(S)$ sobre y"[1]. Se demuestra que si $x \in U$ es transversal a S en todo punto de R^2 es estructuralmente estable en U para la relación de equivalencia R. Las x estructuralmente estables forman un abierto denso en U. La inestabilidad se produce por falta de transversalidad.

Así que la transversalidad puede interpretarse como una síntesis de los lenguajes geométrico -por su relación con la dimensión- y topológico -por su relación con los tipos de intersección-. En el nivel intuitivo de nuestra presentación seguimos el camino predominantemente geométrico, lo que nos lleva a ese juego de las dimensiones y los defectos o excesos dimensionales: la *codimensión.* (Podría seguirse el camino topológico demostrando que las familias forman una intersección denumerable de abiertos densos en el espacio de todas las familias coparamétricas lo que exige un número denumerable de condiciones de transversalidad).

La Codimensión

En la práctica, los físicos o los ingenieros utilizan de forma implícita el concepto de *transversalidad* típica. Supongamos que M es una subvariedad definida por m ecuaciones y M' otra subvariedad definida por m' ecuaciones. Si m+m'= n, el sistema combinado m+m' está sobredeterminado y no tiene soluciones o son soluciones inestables bajo condiciones especiales. El número de ecuaciones que se necesitan para describir una variedad en R^n no aumenta necesariamente al pasar de las curvas a una superficie o de ésta a los volúmenes, etc., sino que, pongamos por caso, una sola ecuación puede representar una curva, una superficie o una hipersuperficie tridimensional. Diremos que, en general, ese número será igual a la diferencia entre la dimensión del objeto y el espacio en el que está sumergido: el número n-dim M es la *codimensión* de M en R^n y equivale al *número de ecuaciones que se necesitan* para especificar la subvariedad. Así:

a) En R^3 una curva necesita ser especificada por dos ecuaciones (según la condición: n - dim M —> 3-1 =2).

b) Pero en R^4 una superficie necesitaría ser especificada también por dos ecuaciones, así como en R^5 lo sería una esfera.

La importancia de este concepto es enorme cuando se trata de *reducir las dimensiones de un problema cuyas dimensiones reales son desconocidas.*

T. Poston y I. Stewart ¡lustran esta propiedad muy intuitivamente. Sea X un mapa usual de Gran Bretaña en el que, por comodidad, se omiten las islas; X es, en este caso, bidimensional; la frontera entre Inglaterra y Escocia es unidimensional. Si ahora trazamos un camino entre Londres y Glasgow, el lugar por el que se atraviesa la frontera es de dimensión cero. Supongamos que vamos en avión. X será ahora tridimensional y la frontera, un plano bidimensional. Pues bien, y esto es lo interesante: tanto en el mapa bidimensional como en el viaje tridimensional la codimensión de la frontera permanece invariante [Fig. 2.20].

Veamos:

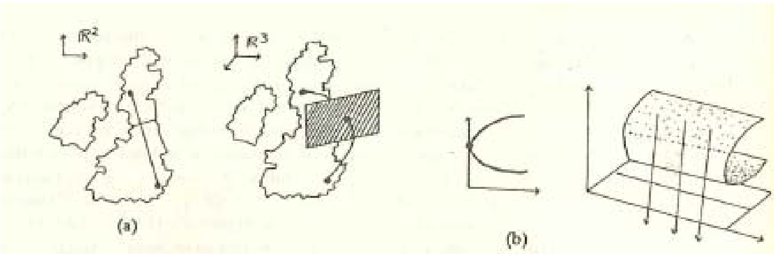


Fig. 2.20 Codimensión

En el mapa bidimensional, la codimensión de la frontera, que es una recta de dimensión 1, es:

cod_{recta} = n-dim M = 2 - 1 = 1.

En el viaje tridimensional, la codimensión de la frontera, que ahora es un plano de dimensión dos, es:

$cod_{p|ano}$ = n-clim M, 3 - 2 = 1.

¡La codimensión permanece idéntica!

* * *

Este corto pero intenso recorrido, no ha pretendido formar topólogos a la carrera, sino abrir los ojos e indicar por dónde parece que se encamina la investigación de fundamentos y el lugar en donde se han de buscar los métodos y las ideas para el pensamiento riguroso. Lo que ante todo hemos querido mostrar es que el pensamiento matemático y físico de los Sistemas Dinámicos coincide con el pensamiento más humanista de las diferencias, en el que no todos los puntos del universo son homogéneos, sino que aquello que ocurre en entornos de puntos puede generar gran cantidad de sorpresas. No todos los puntos son iguales; por tanto, producen comportamientos muy diferentes. Pero esta riqueza está sometida a reglas y leyes; existen semejanzas, analogías, modelos que se repiten. Por ejemplo, la importancia de la transversalidad es la de preservar, por imagen recíproca, la estructura de la variedad del objeto de una aplicación y su codimensión, independientemente de las dimensiones -que pueden ser enormes e inmanejables- de las entidades del estudio en cuestión.

EJERCICIOS

En la literatura al uso, la interpretación lógica del lenguaje natural es muy común. No lo es, sin embargo, la interpretación topológica, que se utiliza fundamentalmente para los cálculos científicos y técnicos. Podríamos tratar de hacer un ejercicio análogo al del capítulo 1, pero por mediación de la teoría topológica.

1) Formalizar desde un punto de vista topológico la definición de «muerte» en el siguiente texto:

"La muerte, pues, no me concierne. Pero observemos que este lugar puntual que no tiene bordes ni adherencias es exactamente el lugar contrario a aquel en el que vive el sabio. Este último habita en el paraje abierto en el que el vector diferencial de la declinación señala un borde, la singularidad del punto inicial en el que nace la naturaleza. La muerte, que se define en rigor como un corte, es todo lo contrario: como un átomo sin clinamen. Lugar sin partes, ni proximidades, del que ha desaparecido toda inclinación. Que la muerte es lo contrarío del nacimiento es simplemente evidente o banal. Que la muerte está fuera de la naturaleza puede demostrarse". SERRES,M.: El nacimiento de la física en el texto de Lucrecio, Valencia, 1994, p. 217.

2) Estudiar topológicamente el siguiente texto:

"En sentido estricto, el ser humano es un tubo de carne impulsado por un mecanismo eléctrico. Esta especie de cilindro tiene algunos agujeros superiores e inferiores, unas alargaderas con pinzas en los flancos y todo eso va montado sobre un compás que sirve para desplazarlo en cualquier dirección, siempre detrás de un deseo. La alta misión de este tubo en la tierra consiste en arramblar cosas de alrededor generalmente vivas, en sacrificarlas, trocearlas, introducirlas en la ranura de arriba y expulsarlas por el escape o sumidero de abajo, después de haberlas transformado en abono". VICENT,M.: "El cilindro", El País.

3) Los vientos alisios que se describen a continuación, ¿a qué tipo de sistema en equilibrio pertenecen?

"Los vientos alisios desplazan el agua marina de la superficie, recalentada al contacto con el aire, las frías aguas profundas remontan a la superficie y enfrían la atmósfera, las bajas temperaturas engendran las bajas presiones, las cuales dan nacimiento a los vientos, el ciclo está cerrado y vuelve a empezar" CANGUILLHEM,C: El conocimiento de la vida, Barcelona, 1976, p. 166.

4) Dibujar una figura topológica que «simbolice» los siguientes textos:

a) "Hasta que regresamos a nuestro mundo objetivo, estrecho, rígido, encorsetado por los principios de una lógica tridimensional. (...) Le hicieron saber que cada figura espacial no es más que el resultado de la intersección, en un plano, de una figura correspondiente que posee además otra dimensión, como el cuadrado resulta de la sección de un cubo, o el círculo de la de una esfera. El cubo y la esfera, con sus tres dimensiones, corresponden a su vez a la sección de otras figuras de cuatro dimensiones, que los hombres conocen sólo por sueños y conjeturas; y éstas, a su vez, son sección de otras figuras de cinco dimensiones y así sucesivamente, hasta remontarse a la inalcanzable infinitud arquetípica. El mundo de los hombres y de los dioses humanos es tan sólo una fase infinitesimal de un ser infinitésimo: la fase tridimensional de la pequeña totalidad que termina en la Primera Puerta, donde 'Umr *at-Tawil dicta sus sueños a los Primigenios. Aunque los hombres la proclamen como única y auténtica realidad, y tachen de irreal todo pensamiento sobre la existencia de un universo original de dimensiones múltiples, la verdad consiste en todo lo contrario. Lo que llamamos sustancia y realidad es sombra e ilusión, y lo que llamamos sombra e ilusión es sustancia y realidad". O.E. HOFFMANN PRICE, H.P. LOVECRAFT.: Viajes al otro mundo, Madrid, 1980, pp. 68-69.*

b) "Delante de mí se halla el retrato de un hombre que lo representa a la edad de ocho años. Tengo a la vista otro retrato del mismo personaje a los quince años, otro a los diecisiete, y uno más a los veintidós. Todas estas fotografías evidentemente no son más que cortes tridimensionales de su existencia tetradimensional, que es un objeto firme e invariable". H.G. WELLS: La máquina del tiempo, cap. 1.

5) ¿Por qué podríamos hablar de un «uso topológico de la pala-bra»en Gabriel Miró? Estudíense los siguientes pasajes de sus obras:

"La palabra, creada para cada hervor de conceptos y emociones, la palabra que no lo dice todo, sino que lo contiene todo: "[Félix] volvió a su corazón el suave recuerdo de la despedida (...) '¡Y yo qué poco te he visto!' Y vio las palabras, hechas de rasgos de luz, en toda la tarde: sobre el cielo, sobre los montes, dentro de la arboleda, conmoviéndose de contento y gratitud"; "¡No tenemos prisa! -lo pensó y dijo Sigüen-za para que se oyese, creyendo que objetivaba la realidad de su júbilo, porque veía sus palabras desnudas en el silencio, silencio desde su boca hasta las cumbres"; "Hablaba Jesús; y sus palabras se veían cinceladas en la excelsidad del paisaje".

6) ¿Cómo podría formalizarse topológicamente la expresión coloquial: «Cuando algo dicen, algo hay»?

7) Formalizar los siguientes textos orteguianos desde una perspectiva topológica:

a) "¿Nos hemos preguntado alguna vez dónde están los límites del objeto? ¿Están en él mismo? Evidentemente, no. Si no existiera más que un objeto aislado y señero, sería ilimitado. Un objeto acaba donde otro empieza. ¿Ocurrirá, entonces, que *el límite de una cosa está en la otra? Tampoco, porque esta otra necesita, a su vez, ser limitada por la primera. ¿Dónde, pues?*

Hegel escribe que donde está el límite de una cosa no está esta cosa. Según esto, los límites son como nuevas cosas virtuales que se interpolan e interyectan entre las materiales, naturalezas esquemáticas cuya misión consiste en marcar los confines de los seres, aproximarlos para que convivan y a la vez distanciarlos para que no se confundan y aniquilen. Esto es el concepto: no más, pero tampoco menos. Merced a él las cosas se respetan mutuamente y pueden venir a unión sin invadirse las unas a las otras". ORTEGA y GASSETJ.: O.C, t. 1, p. 352.

b) "Solía Leonardo de Vinci poner a sus alumnos frente a una tapia, con el fin de que se acostumbraran a intuir en las formas de las piedras, en las líneas de sus junturas, en los juegos de sombra y claridad, multitud de formas imaginarias. Platónico en el fondo de su ser, buscaba en la realidad Leonardo sólo el paracleto, el despertador del espíritu." Ib., t. 1, p. 386.

c) "El impresionismo nacido de una antipatía hacia las cosas atomiza las formas en puros reflejos: de una jarra, de una faz, de un edificio, pintará sólo la masa cromática amorfa. El primitivo, entusiasta del mundo que le rodea, sigue un camino opuesto: hará abstracción de los reflejos que deforman el cuerpo de cada objeto, y como si la pupila fuera una mano, la deslizará sobre la superficie, no admitiendo confusión ni vaguedad en los contornos". Ib., t. 2, pp. 269-270.

CAPITULO 3. UNI- Y N-DIMENSIONAL

El capítulo 1 ha querido mostrar la manera «conjuntista» de pensar. Desde el punto de vista de la coherencia, incluso de la elegancia, el planteamiento es perfecto: se comienza con la definición de *conjunto* mediante el *axioma de extensión* y, una vez introducido el concepto de *función,* se termina asegurando la existencia de algún conjunto, según el *axioma de elección.* Se parte del conjunto *vacío* y se alcanza la hipótesis del *continuo* como resultado.

El capítulo 2 ha pretendido acercarse a la manera de pensar «topo-lógica», que sugiere una dirección diferente al modo de pensar «conjuntista». La topología considera los objetos matemáticos desde una perspectiva bastante grosera si, como dice la leyenda, «el topólogo es el matemático que no puede dar razón de la diferencia entre una rosquilla y una taza de café». Claro que si recordamos la definición que un formalista como Russell hace de las matemáticas (conjuntistas) -«la ciencia en la que no sabemos de lo que estamos hablando ni si lo que decimos es verdad»-, entonces, ¡mejor olvidarse de las matemáticas! Pero ¿cómo olvidarlas, cuando ya Platón prohibía la entrada en la Academia a «quienes no saben geometría»?

La cuestión es: ¿Por qué el *topólogo* rechaza al *conjuntista?* ¿De dónde su enfrentamiento? Para el conjuntista, las matemáticas del *continuo* son un empobrecimiento de las matemáticas de lo *discreto.* Para el topólogo, el *continuo* es una realidad operacional y la existencia de modelos enumerables significa pobreza del lenguaje formal como medio de imitación de los razonamientos no formales. Mas la «pobreza del lenguaje formal» no puede hacernos olvidar que toda proposición, incluso las aserciones del topólogo, se hace en un *lenguaje de carácter discreto, lineal,* un/'-dimensional. Nuestro saber tiene una estructura proposicional: nuestras opiniones, nuestras creencias, nuestros valores... se explicitan en forma de enunciado. Por eso es necesario codificar las morfologías intuitivas (tridimensionales) por medio de álgebras, de símbolos unidimensionales, lo que nos obliga a tener en cuenta las herramientas de análisis de lo discreto que se aplican también al lenguaje. De ahí que necesitemos un criterio *gnoseológico* sobre la legitimización de los sistemas lógico-formalistas y topológico-intuicionistas. Defenderemos la tesis siguiente: Las operaciones que realizan los sistemas unidimensionales y discretos son de carácter *autoformante,* mientras que las operaciones que realizan los sistemas pluridimensiones (topológico-geométricos) son de carácter *heterofor-mante.* La *autoformación* es el carácter límite y degenerativo de la *heteroformación.*

3.1. GEOMETRÍA *versus* LÓGICA

Lo que Thom critica no es tanto la teoría de conjuntos en sí misma -que vale lo que vale-, sino el uso que de ella se hace como justificación lógico-formal de foria la matemática. La formalización tiene la ventaja de permitir la comunicación entre los matemáticos y, como los modos de comunicación -ya escritos ya orales- recurren a una *morfología unidimensional,* se hace necesario codificar las morfologías n-dimensionales en símbolos un/-dimensionales. Por ejemplo, el teorema de Gódel asigna números a los símbolos, a las series de símbolos y a las series de series de símbolos que ocurren en el lenguaje formalizado; en paralelo con la geometría de coordenadas cartesianas, que asigna pares de números a los puntos de la superficie euclidiana, Gódel inventó lo que podría denominarse la *metamatemática de coordenadas.* Si la primera usa pares de números reales *(a,b)* para la geometría bidimensional, tríadas de números *(a,b,* c) para la geometría tridimensional, y así sucesivamente *(a,b, c.n...),* la metamatemática de coordenadas es t/n/-dimensional y utiliza sólo números enteros.

Pero este paralelismo Descartes// Gódel no es meramente retórico, sino muy profundo. Pues los lenguajes lógicos difieren de los lenguajes topológicos desde un punto de vista operacional-gnoseológico. Fenomenológicamente, el dualismo metodológico -Formalización / Topología- parece claro. Así lo ha visto, por ejemplo, Levi-Leblond. Para este gran físico y gran crítico de la sociedad ambos movimientos constituyen respuestas alternativas a la misma cuestión de fundamentación de las matemáticas. Ahora bien, ¿cómo unas teorías que apuntan a una tal globalidad podrán evitar la trivialidad? Pero nosotros consideramos que la relación no es sólo fenomenológica, sino *dialéctica,* lo que supone que una de las dos metodologías ha de incorporar a la otra como un momento suyo. Así interpretamos un famoso quiasmo de

Thom: *«En lugar de fundar lógicamente la geometría, tratemos de fundar lo lógico en la geometría)).*

Crítica de los Sistemas Formales

La crítica de Thom a los Sistemas Formales y a la Lógica es, preferentemente, gnoseológica y alcanza a los tres ejes que vertebran una ciencia:

i) Al aspecto pragmático: la teoría de conjuntos carece de **espacio-sustrato.** Los ejemplos de la teoría de conjuntos son muy pobres, lo que se pone de manifiesto por su carente -además de confuso- valor pedagógico. *"La lógica no tiene, en principio, nada que ver con la representación del espacio" ?*

ii) Al aspecto semántico: la Geometría es menos gratuita y más rica en **significación** -por su referencia a la intuición- que los sistemas formales, más ricos desde un punto de vista sintáctico.[2]

iii) Al aspecto sintáctico. Distinción **Generatividad / Operatividad:** la crítica de Thom va dirigida, sobre todo, contra la *generatividad libre* de los lenguajes formales, pues *"es la autolimitación de las capacidades generativas de la sintaxis lo que pide explicación"?* Así que las lenguas naturales no son axiomatizables, puesto que su fundamento ha de encontrarse en la (auto)-regulación biológica y física, i. e., en la estabilidad de los organismos. Hay que distinguir, entonces, entre *generatividad y operatividad.* La Generatividad, por una parte, nos permite construir fórmulas tan largas y complejas que hacen imposible su interpretación intuitiva, y, por otra, limita los resultados, que no pueden ir más allá de una geometría uní o biclimensional. Así, tanto los términos como los resultados generados mediante el uso de las reglas de transformación permanecen en el mismo plano espacial. Pero la Operatividad, que se lleva a cabo, por lo general, en el espacio *tri- o* fefra-dimensional, se ha de proyectar en un plano cuando queremos controlar mejor las relaciones entre sus partes. En este contexto nos parece excepcional el pensamiento de Bacon: *"Toda la industria del hombre estriba en aproximar las sustancias naturales unas a otras o ensepararlas; el resto es una operación secreta de la Naturaleza".*[4] Si leemos «aproximar» por *espacio* *unidimensional* y «operación secreta» por *tridimensional,* este aforismo de Bacon nos puede ayudar a imaginar los conceptos de Generatividad, con sus reglas de ampliación y de reducción, y de Operatividad, con sus reglas de síntesis.

3.2. SÍMBOLOS AUTOGÓRICOS Y OPERACIONES AUTOFORMANTES

Un símbolo puede ser: o bien vacío (es decir, sustitutivo, que puede reemplazar a otra cosa); o bien pleno de contenido de una vez para siempre (un arquetipo en el sentido de Jung); o bien causado por la actividad humana. En este último caso, al destacar el carácter tecnológico del símbolo, se pone de relieve su diferencia con la *imagen,* porque no ha de mantener una semejanza o una contigüidad con los objetos, sino que éstos pueden quedar indeterminados respecto de los símbolos. Los objetos a los que se refiere el símbolo no son cualesquiera (indiferencia de la vacuidad), ni son los que «han de ser» (originarios, *ursprung),* sino que se determinan en el mismo acto de significar, es decir, en contextos reales, vivenciales; son los signos definidos según la teoría del estímulo-respuesta o teoría conductista, que es la que explica la vía de acceso a la realidad (una realidad que suponemos infinita).

Los signos matemáticos «desplegados» en un espacio un/-dimensional constituyen el contenido material de ese espacio y llevan incluidas, como cualquier materialidad, estructuras lógicas particulares. El análisis gnoseológico de estas entidades materiales que son los *signos* ha sido aclarado en el artículo de Gustavo Bueno "Operaciones autoformantes y heteroformantes"[5], que enriquece la distinción de Kant (1763) entre signos *in concreto* -que expresan los pensamientos y sus relaciones- y signos *in abstracto* -carentes de toda conexión interna con su significado-.

Descartamos aquí la Lógica como un reflejo mental del Mundo o como la trama a *priori* del universo y nos situamos en el plano tecnológico: la Lógica no es sino *"un artefacto construido en el plano bidimensional del papel o de la pizarra",* es decir, la construcción de un campo cerrado, en un espacio de dos dimensiones, que escribe las «leyes» y las «reglas» en la dirección izquierda-derecha, y se mantiene dentro de unos márgenes de temperatura precisos más allá o más acá de los cuales los signos lógicos y su combinatoria desaparecerían. Así la conmutatividad: (a / *b)* = (b / a), tiene sentido en el *cuaderno* del científico nuclear, pero no en el interior del *reactor* nuclear.

Se requiere, por tanto, de una Teoría del Símbolo diferente a la empirista, en la que un *nombre* sustituye a una entidad ya física ya ideal. Diremos que un símbolo es *autonímico* o *autónimo* si el significado es *causa* del significante, aunque de tal manera que el significante sea parte del significado; es la característica de los términos autorreferentes que «son nombres de sí mismos». Un símbolo es *tautogórico* si el significante es causa del significado y no se requiere la condición de semejanza; es la característica de los *slgnum sui,* de los signos religiosos o míticos, que «causan un efecto»: la imposición de manos del milagrero o el «Sí, quiero» de los contrayentes matrimoniales. Los Símbolos que son a la vez *autonímicos* y *tautogóricos* se denominan *autogóricos.*

Los Símbolos *autogóricos* se definirán, pues, como aquellos símbolos en los que, a la vez, el significante causa el significado (tautogóricos) y el significado causa el significante (autonímicos): Se forma un círculo en el que el significante regenera el significado. Por ejemplo, «la flecha del tiempo», que si logra representar al «tiempo» lo consigue en virtud del movimiento de quien traza la flecha. El trazo «—>» no elimina su referencia semántica, sino que la tiene incorporada en el propio significante al ser dibujado.

Pues bien, los símbolos de la lógica, diremos, son signos *autogóricos.* Recuperamos, de esta forma, la dimensión «física», «tipográfica» de los símbolos lógicos, que dejan de ser aplicables a cualquier materia. Interpretar los símbolos como autogóricos es aquí lo decisivo. Los símbolos no son algo puramente formal (vacío), sino que en ellos se reconoce *toda la estructura geométrica* (ordenaciones, permutaciones, derecha, izquierda) que en su propia realidad de significantes debe ir implicada. V. gr., el número «(1+1+1)» se representa por una tríada; las letras variables «A», «8», «G>... son ya clases, etc.

Las operaciones autoíormantes

A estos símbolos hay que tratarlos como al resto de las ciencias y estudiar cómo se configuran las verdades de la lógica y de las matemáticas. Defendemos que el momento esencial de cualquier ciencia es el de sus *operaciones:* la reconstrucción del fenómeno, la experimentación, el laboratorio... Asimismo el momento esencial de la lógica es el de sus operaciones, en virtud del carácter «autogórico» de los signos:

cómo los signos producen otros signos, sin referencia más que a sí mismos. Cuando se estudia la lógica desde la naturaleza de sus operaciones, aparecen características que pasan desapercibidas en la perspectiva analítica.

Una operación se refiere a los *términos* operados (factores) y al *resultado* de la operación [Cap. 1]. En una operación hay que distinguir, por una parte, los *términos componentes* y los *nombres* de los términos componentes y, por otra, los *términos resultantes* y los *nombres* de los términos resultantes. Así, en la operación *«a+b=c»,* hay que destacar que c no es el nombre de un objeto construido por «a+b» -pudiera tener otro nombre-, sino el propio objeto construido a través del *objeto* designado por *«a+b».* Sea la suma «7+5=12». La conjetura de que esta suma es *analítica,* en el sentido de que «12», el predicado, no añade nada al sujeto, «7+5», supone que «12» no es más que el *nombre* de «7+5», es decir, una abreviatura de «7+5». Esta formulación es inaceptable gnoseológicamente porque el predicado no es «12», sino el relator: «=», así como los sujetos son: «7+5» y «12». Y esto por dos razones:

a) Porque el resultado «12» es autónomo, puede *segregarse,* separarse, hasta el punto de que puede recomponerse con alguno o todos los factores; v. gr., «12-5».

b) El resultado puede *nombrarse* mediante otro símbolo. Por ejemplo V 144, 3x4, 1100, etc. «12» es el resultado de un algoritmo operatorio y no se puede entender como una abreviatura de, pongamos por caso, la suma de doce trazos:

«l + l + l + l + l + l + l + l + l + l + l + l».

Hemos de entender los símbolos 1,2,3.../?, como símbolos aritméticos, resultados de operaciones y no meros nombres. Dicho de otro modo: 1,2,3...n, no *designan* símbolos matemáticos, sino que *son* entes matemáticos que proceden de otros entes matemáticos y, por tanto, vinculados entre sí. De lo contrario, «7+5», por ejemplo, no nos conduciría a un objeto nuevo, «12», sino a un *nombre* que denota un objeto previamente dado y esto supone la reduplicación del mundo: que la esencia «12» existe con anterioridad a su construcción, tesis con la que no podemos comprometernos desde una ontología que considera los signos algebraicos en su materialidad.

Contextos de los «nombres resultantes»

Los nombres del término resultante de una operación pueden entenderse bajo dos criterios: o bien el nombre está *asociado* a la operación, o bien el nombre está *disociado* de la operación. En el primer caso, el término resultante se define como un nombre, en el sentido de *analítico.* Por ejemplo, «12» es el nombre de «7+5». Si, por ejemplo, «I,I,I,I,I,I,I,I,I,I,I,I» resulta de «I,I,I,I,I,I,I» y de «I,I,I,I,I», «12» sería el nombre asociado a «5+7». En el segundo caso, el término resultante estaría entendido *sintéticamente.* Ahora, «12» es definido como resultado de operaciones diferentes entre sí, v. gr., «7+5», «V 144», «3 x 4», etc.

Pero si en el ejemplo aritmético hay cierta ambigüedad, no ocurre lo mismo, creemos, en el caso algebraico. Por ejemplo, si a x $a'=\varnothing$, es imposible deducir $\varnothing$ de a x a'; si a + $a'= b + b,$ es imposible deducir a + a' de $b + b',$ porque en a + a no se contiene «analíticamente» $b + b.$

Características de una operación formal

Según lo anterior, las operaciones pueden caracterizarse como:

A) *Propiedades de las operaciones:* Se tiene en cuenta no el término resultante de la oración (que queda segregada), sino la disposición de los componentes. Esto es, se expresan al margen del valor resultante, como si fuesen oraciones puramente sintácticas.

Por ejemplo, en la propiedad asociativa: a + *(b* + c) = (a + *b)* + c, los elementos que resultan de la oración: (a + *b)* + c, son elementos de los términos operados: a + *{b* + c).

B) *Aspectos de las operaciones:* Se tiene en cuenta el término resultante de la operación en cuanto disociado y se señalan las conexiones de los factores con el término-referencia resultante, como si fuesen oraciones puramente semánticas. Por ejemplo: a+a=1. Aquí, los elementos resultantes son distintos de los términos operados. Por ejemplo, dadas las siguientes características (leyes) del álgebra:

a + b = b + a => b + a = a + b, ya + b = c=>c≥a, diremos que:

a + b=b+a,y a + b> a, son propiedades;

a + b= c y c> a, son aspectos.

C) *Aspecto modular de las operaciones:* Cuando una *propiedad es* a la vez *aspecto,* esto es, cuando *el término resultante disociado es uno de los componentes,* la característica adquiere una modalidad trascendental. Esto quiere decir que es la misma sintaxis (propiedad) la que incluye su propia semántica (aspecto) y recíprocamente. Veamos algunos ejemplos:

1) Supongamos dos operaciones cuyos términos resultantes son disociados: *a* x *a=c* (si a≠c)ya + a= *a.* Las características de a x a = c y de a + *a = a* son distintas:

ax a= c nos remite a un *aspecto* de la operación. Sin embargo a + a = a, no sólo no nos remite a un aspecto, sino que nos devuelve a los factores como una *propiedad.*

2) Supongamos la operación: *a* + ∅ = *a.* Suponemos, además, que es una operación disociable. Entonces, a + ∅ = a es una *propiedad,* puesto que a es el nombre de uno de los componentes. Pero a + ∅ = a es un *aspecto* también, puesto que nos remite al nombre del resultante que es disociado.

Ahora podemos hablar, justificadamente, de la diferencia entre:

I) Propiedades de las operaciones: En este caso nos desligamos de los objetos resultantes y nos mantenemos en el plano de los factores: las propiedades pueden abstraer los resultados; así: a x *b*= *bx* a.

II) Propiedades de los términos privilegiados (aspectos): En este caso nos vinculamos a los resultados necesariamente. De ahí su carácter más semántico: a x1 =a y a x 0 = 0. Estos términos son los utilizados en el álgebra como elementos neutros, absorbentes...

Los aspectos «reiterantes» de las operaciones

Como ya sabía Aristóteles, así como las cosas son en número infinito, los términos para nombrarlas son en número finito: *"En efecto, los nombres y la cantidad de enunciados son limitados, mientras que los objetos son numéricamente infinitos. Es, pues, necesario que un mismo enunciado y un único nombre signifiquen varias cosas"*.[b] El número de símbolos es muy limitado, del orden de 100. De donde se hace inevitable que múltiples cosas sean significadas por una sola definición y un único nombre. Es necesaria, por tanto, la *reiteración* de los signos. Pero cuando tratamos de los signos autogóricos, la *repetición* de los signos nos conduce a un modo especial de reiteración, no sólo genérico, en virtud del postulado aristotélico de la *homonimia* de los nombres (es decir, de los múltiples significados de un término). Este modo especial será llamado «aspecto reiterante», porque el término que se repite es un *parámetro* o *núcleo* de los factores de la operación. Sea una operación cuyo resultado contiene repeticiones respecto de los parámetros o núcleos (aspectos de las operaciones).

Puede ocurrir que los términos repetidos, aun cuando se trate de una repetición sistemática, no reproduzcan ningún término de los componentes. Así, 20:3 = 6,666666, se denominará «reiteración débil». O puede ocurrir que la repetición afecte a los factores de la operación. Así: a) 20 : 9 = 2'222222; b) 20 x 1 = 20.

Hay una diferencia entre los dos casos. En a) la repetición no es esencial, porque no reitera ningún núcleo. En el segundo la repetición es esencial, porque reitera un parámetro o núcleo [Fig. 3.11]

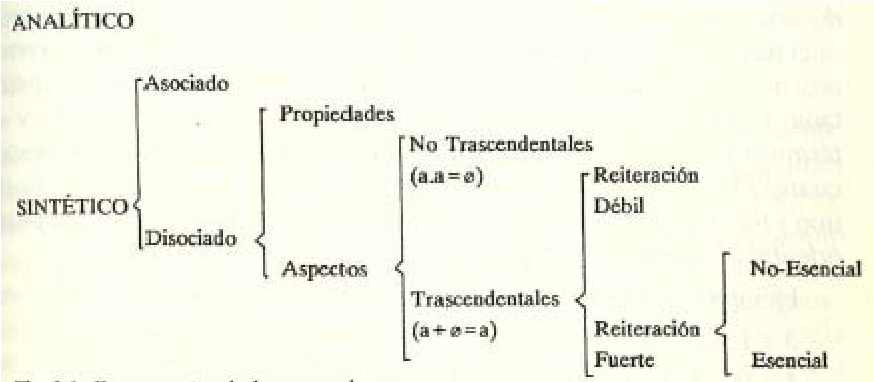


Fig. 3.1. Componentes de las operaciones

Totalidades atributivas y distributivas

Los símbolos repetidos en una operación reiterante fuerte pueden formar una totalidad, ya sea Atributiva, ya sea Distributiva.

A) Una totalidad (3) de tipo *distributivo* agrupa a sus *partes* de tal manera que lo que se dice del *todo* se dice de *cada* una, esto es, la propiedad a que hace referencia la totalidad se *distribuye* en cada uno de sus miembros. Puede ilustrarse mediante el ejemplo del papel-moneda. Los billetes de curso legal lo son porque en ellos se ha distribuido el *todo* que se encuentra en el Banco de España. Si *A* es el Banco y *B,C,D,...* los billetes, entonces: $Ax\ (B + C + D + \ldots) = (A \times B) + (A + C) + (A + D) + \ldots$ quiere decir que *A* se distribuye en cada uno de los *B, C, D...*

B) Una totalidad (7) de tipo *atributivo* se constituye por *acumulación* de partes, existiendo indiferencia en las composición de las partes. La unidad que forman está vinculada por contigüidad o copresencia: las partes de oro acumuladas en un lingote de oro.

Por ejemplo: A) Sea la operación «dividir por 2» en un conjunto R de números. Esta operación es reiterante (se repite el número 2), de tipo distributivo (de cada número se dice que es «dividido por 2»),

B) Sea el polinomio algebraico: $f(x) = a^0 (x- a)^0 + a^1 (x- a)^1 + ...+a_n - n)^n$; es de tipo atributivo, porque es indiferente el termino que se repite *(x* - a) en cada parte de la fórmula

Operaciones autoformantes

Pues bien, se definirá la Lógica como aquella disciplina cuyas fórmulas son construidas a partir de *operaciones autoformantes.*

"Llamaremos operaciones autoformantes *(o aspectos autoformantes de una operación o función dada) a aquellas que incluyen la reproducción (o reiteración total) de al menos uno de los núcleos o términos nucleares componentes (sin excluir el funtor) en el término resultante (...) de suerte que la relación entre el término reproducido y el término parámetro sea de identidad isológica distributiva,* es *decir, cuando los términos se mantienen entre sí como partes de un todo de tipo ¡ (identidad esencial) y, en el caso eminente, como la misma parte (identidad numérica o sustancial)".*[7]

Ejemplos de operaciones autoformantes: *a* x 1 = *a; a* + 0 = *a;* a + a = *a; a* x 0 = 0; 1' = 0; 0' = 1; 1 + 0 = 1; 1 x 0 = 0; 1x1=1;; 0 + 0 = 0; 1+1=1; 0x0 = 0 Como ejemplos de diversos cursos operatorios autoformantes, podemos señalar:

A) Modo de autoformación Reiterante o Modular: Cuando la operación reproduce uno o todos los factores nucleares, desapareciendo el operador como término: a x a =*a; a* + 0 = a *(«a* x a» es el factor nuclear y «1», el operador, etc.)

B) Modo de autoformación Absorbente: Cuando la operador elimina el término al que se aplica la operación, reapareciendo como resultante el término absorbente: a x 0=0; *a* + 1 =1 *(«a* x 0» es el término absorbente y «0», el operador). Si por el aspecto modular los términos dados son reconstruidos, por el aspecto absorbente son destruidos.

C) Modo de autoformación Involutiva: La operación nos conduce, tras una serie de pasos, al punto de partida: x = x x x = *x* x x + 0 = *x* xX + X X *X'* = *X* X (X X xO = X X 1 = X.

La involutividad tiene que ver con la «reversibilidad» de las operaciones en el sentido de Piaget. Pero hay que destacar que no toda operación autoformante es reversible, aunque sí toda reversibilidad sea una autoformación. Por otra parte, no toda operación involutiva es una autoformación: para ello se requeriría que el todo fuera distributivo. Por ejemplo, las funciones periódicas como seno, coseno, etc. producen el mismo valor tras un período 6. Pero la totalidad que fundan es atributiva: la acumulación de los arcos 0, $\pi/2$, π, 3 $\pi/2$, etc. Ahora bien, estos arcos no están determinados por la operación, sino por la serie sobre la que se aplica la operación.

Las operaciones *no-autoformantes* se denominarán *heterofor-mantes* y caracterizan el tipo de actividad matemática. Las operaciones matemáticas, desde una perspectiva gnoseológica, se caracterizan por construir totalidades atributivas; por ejemplo: $a^3 = a \times a \times a$; 15 -10 = 5,...

En este sentido decimos que un álgebra booleana es *autoformante,* así como otras muchas estructuras que habitualmente consideramos como lógicas: tautologías y contradicciones, lógica de las relaciones, deducción, cuantificación lógica, teorema de Lovenheim, silogismo formal, verdades lógicas, funciones recursivas, etc. Detengámonos un momento en este último punto. Una función recursiva primitiva aparece en unos contextos como una operación autoformante, i.e., la regla se repite indefinidamente de tal manera que cada resultado recibe una interpretación *distributiva;* y en otros, como una operación heteroformante, puesto que envuelve la operación de «sucesor de» en sentido acumulativo, teniendo en cuenta el resultado total de la operación anterior; así, en las *iteraciones* y en las *recurrencias.*

En los procesos de inducción lógica y matemática puede ejemplificarse esta distinción: la inducción matemática conforma un todo que es una *serie.* La propiedad de la serie no es válida para «algunos» números, sino para el resultado final. Pero como la propiedad de la inducción matemática se va distribuyendo paso a paso, se exige la inducción lógica que recorra la serie resultado por resultado. Es lo que ocurre en pedagogía cuando se le pide a un alumno que «demuestre» el resultado del problema. Ese resultado puede acertarse por intuición, por casualidad (en general por *intensión),* atributivamente, por contigüidad. Pero después se le pide que vaya *paso* por *paso,* i.e., que demuestre el resultado. Es tras la confluencia de ambos procesos cuando se dice que el problema está comprendido: el resultado es el adecuado y los pasos los correctos.

En la historia de las matemáticas hay muchos casos de esta confluencia. El más celebrado quizá sea el de Gauss niño cuando resuelve un problema de series (de carácter *atributivo)* mediante el recurso a una ley (de carácter *distributivo): "...el maestro tuvo la idea de hacer sumar a sus alumnos todos los números del 1 al 100, ordenándoles además que, según fuera terminando esa tarea, debería colocar cada uno su pizarra sobre la mesa del maestro. Casi inmediatamente colocó Cari su pizarra sobre la mesa diciendo: «Ya está»;* [carácter *atributivo}... El muchachito de diez años había hecho evidentemente el cálculo mental de sumar la progresión aritmética 1+2 + 3 +...+ 98 + 99 + 100 asociando parejas de términos igualmente alejados de los extremos, es decir, esencialmente utilizando la fórmula* (m+1)m/2 [carácter *distributivo]"*[8]. Tras lo dicho, podemos extraer una conclusión que necesitamos para acotar y matizar la crítica de Thom a la generatividad.

La generatividad infinita o indefinida a la que se refiere Thom es -dicho en los términos de este capítulo- la recursividad atributiva, más que la distributiva. Pero justamente es este tipo de recursividad el que caracteriza a las matemáticas y no a la lógica. La generatividad que se encuentra en el ojo del huracán de Thom es, por consiguiente, más matemática que lógica.

3.3. EL CRITERIO «GNOSEOLÓGICO» DE BOOLE

Boole estableció un criterio de diferenciación entre la lógica y las matemáticas, precisamente en su nivel operatorio: mientras que en las operaciones lógicas cabía la ¡dempotencia: a + a = ay axa=a, ello no era posible en la operatividad matemática (salvo en las evidentes excepciones: 0 + 0 = 1 y 1 x 1 =1). Ahora podemos comprender, de manera interna, por qué el análisis de Boole iba bien encaminado: la idempotencia es *aspectual,* porque su concepto incluye referencia al término resultante a + a = a y, a la vez, *trascendental.*

Aplicamos un modelo de la lógica según la hipótesis gnoseológica siguiente: la lógica ha sido «cerrada categorialmente» por Boole. Lo que hace éste es precisamente fijar las fórmulas para los valores 1 y 0, negando los conceptos geométrico-topológicos esenciales de *continuidad y acumulación.*

Suponemos que los símbolos del álgebra de Boole [cap. 1] son puramente lógicos, distributivos: los x tales que poseen la propiedad P; los y tales que poseen la propiedad Q; etc. De entre todas las propiedades de los operadores, aquella que discrimina a la lógica es la «extraña» propiedad llamada *ley del índice:* $x^2 = x$. El método de Boole permite transformar las formas lógicas en otras formas lógicas en virtud de la función (que él llama *electiva)* de x. Su interés radica en que se trabaja algebraicamente dejando a un lado la interpretación de los símbolos para restituir, al final de las operaciones, la interpretación lógica. Sólo tenemos que traducir entonces las proposiciones de la lógica tradicional a este lenguaje algebraico.

Ahora bien, encontramos una disonancia en el método de Boole. Decimos que las proposiciones son *ecuaciones.* Una ecuación no es una función, porque no tiene incorporado el concepto de *continuidad* [cap. 1]. Pero Boole, que está tratando con ecuaciones para encontrar las soluciones o raíces, introduce, súbitamente, el concepto de *{unción:* "Puesto que los símbolos electivos se combinan según leyes de cantidad, podemos desarrollar una función dada (|)(x)..."[9]. Alcanza entonces la fórmula fundamental: *Ax)* = /U)x + /(0)(1-x). ¿Por qué se produce este salto? ¿Qué regla o principio lo autoriza? Dicho en nuestros términos: ¿Cómo se pasa del razonamiento *lógico-distributivo* de los símbolos electivos al *funcional-acumulativo?*

La estrategia de Boole es sorprendente: utiliza la fórmula matemática de McLaurin, que le permite eliminar, por así decir, lo que pertenece a la función y retener lo que pertenece a la ecuación: Para construir la fórmula lógica: ftx) = *ax* + ¿(1-x) recurre a una fórmula matemática por antonomasia. La fórmula de Me Laurin, que es el caso en el que la fórmula de Taylor toma el valor cero en el punto *a.*

Fórmula de Taylor: $f(x) = f(a) + (x-a)^1 f(a)/1! + ... + (x-a)^n f^n(a)/n! + Tn(x)$

Fórmula de Me Laurin: f(x) = *f(0)* + $(x)^1$ *f(0)/1!* +...+ $(x)^n$ f^n*(0)/n! +Tn(x)*

Como los valores de las variables de Boole son dos, 1 y 0, y teniendo en cuenta la restricción de la ley del índice x= x", la fórmula de Me Laurin toma esta forma:

f(x) = *f(0)* + x{ *f(0)/1* ! +...+ $(x)^n$ f^n(0)/n! + Tn(x)! [1]

Si x= 1, entonces:

f(1) = *f(0)* + *f(0)/1* ! +...+ $(x)^n$ f^n(0)/n! + Tn(x)! [2]

De donde:

f(1) - *f(0)* + *f(0)/1* ! +...+ $(x)^n$ f^n(0)/n! + Tn(x)! [3]

Y sustituyendo todo el paréntesis de [1] por el valor que recibe en [3]:

f(x) = *f(0)* + x{ *f(1)*- f(0)},luego:

f(x) = *f(0)* + *f(1)x* - *f(0)x* = *f(1)x* + *f(0)(1-x)* [QED]

La cuestión gnoseológica de Boole hay que localizarla en que la suma de los distintos factores en la fórmula de Me Laurin se refiere a una acumulación de partes al modo *atributivo.* Y es esta acumulación *la que se impide* al introducir el criterio de $x=x^2$. Esta totalidad se anula y queda exclusivamente la totalidad distributiva. La estructura de función se reduce a la de ecuación y ésta, a la de coordinar (distributivamente) la variable o bien al valor 1 o bien al valor 0, que deja de ser una operación *acumulativa* para convertirse en una operación de *alternancia* entre dos valores, i. e., la fórmula de McLaurin, matemática, queda transformada en la fórmula de Boole, lógica.

El razonamiento de Boole podría resumirse de esta manera: se parte de la definición de lógica, que es una operación distributiva; se apoya en una fórmula matemática, que es atributiva, y reduce ésta a aquélla, eliminando los momentos atributivos hasta dejar aislado el momento distributivo característico de la lógica, según la ley de contradicción: x(1 - x), lo que significa que no se puede coordinar una variable, a la vez, con 1 y con 0.

Thom realiza algunos comentarios que, nos parece, sitúan la lógica booleana en el contexto que acabamos de realizar: *"En la actividad matemática, y sobre todo algebraica, hay, pues, un acento puesto en la periodicidad, en el carácter iterativo de las acciones de regulación en detrimento de la permanencia del sujeto"*. Y un poco más tarde: *"En Occidente, la influencia dominante de la lengua hablada determinó una codificación silábica o alfabética; el significante se impuso brutalmente a lo significado"*.

3.4. EL CRITERIO «GNOSEOLÓGICO» DE LA TC

La operatividad, en cualquier caso, exige un supuesto: el *espacio* (geométrico) en el que se llevan a cabo esas operaciones. Fuera del espacio, las operaciones no tienen sentido. Durante mucho tiempo ha quedado oculto este carácter, debido al uso indiscriminado de los diagramas de Euler-Venn. En la lectura *extensional* del razonamiento se tiende a la confusión entre los elementos algebraicos -«A pertenece a B», etc.-, y con los elementos geométricos y topológicos. Esta confusión procede tanto de identificar ambas estructuras como de negarlas. Citaremos un texto del nada sospechoso Gardner -quien considera la TC muy negativamente-, que recoge perfectamente la cuestión tratada: *"Entonces surge un problema: ¿las leyes topológicas aquí implicadas sirven de fundamento a la lógica de la inclusión de clases o, al contrario, son la leyes de inclusión de clases las que sirven de fundamento a las leyes topológicas? Pero se trata obviamente de una cuestión verbal. En rigor, ni las leyes de la lógica de clases sirven de fundamento* a *las leyes topológicas, ni éstas son el fundamento de aquéllas. Lo que sucede es que en los círculos de Venn y en la sintaxis de un silogismo tenemos dos maneras diferentes de simbolizar la misma estructura; la primera manera es geométrica y la segunda es gramatical"*.

La entrada en liza de Thom es clarificadora. Así como el paso de un plano fa/'-dimensional a un cuerpo tri-dimensional -paso de lo *local* a lo *global*- es muy complejo y se necesitan conceptos difíciles -series de Taylor y espacios de Riemann[12]-, el recíproco no lo es tanto; el paso de un espacio *tri- o* n-dimensional a uno *uni-* o bi-dimensional, se justifica sencillamente por *proyección.* Esto quiere decir que la operatividad en un sistema n-dimensional, con n>2, ha de desbordar los cursos o procesos autoformantes. Sin embargo, *este proceso autoformante queda siempre incorporado como la proyección mínima en un espacio 1 -dimensional.*

Coordinando ahora el *espacio uni- o* fa/'-dimensional y las *operaciones autoformantes,* la TC de Thom permite -tal es nuestra hipótesis-dar una solución muy original a las controvertidas relaciones *no sólo* entre la lógica y las matemáticas, sino también a las relaciones fenotipo-genotipo, neurología-inmunología,... y todos los contextos en donde se relacionen estructuras de distintas dimensiones que mantengan proyecciones entre ellas. Al contrario que Boole, que desarrolla la fórmula de Taylor al modo autoformante, desarrollémosla al modo *hete-roformante,* vía geométrico-topológica, utilizando el concepto de espacio-jet [Cap. 2]. Semejante estrategia seguirá los siguientes pasos:

1) Se tratará de establecer lo que ocurre localmente, no a lo largo del tiempo -que es la característica propia de la física-, sino a lo largo de la variedad *U,* dirección medida por la *codimensión.* Consideraremos, además, que estamos trabajando en un tiempo s = t [Cap. 2].

2) Por tanto, en vez de hallar la derivada respecto del tiempo para saber si es transversal o no, se puede hallar la derivada respecto a la variedad *U,* esto es, la dirección de los despliegues [Cap. 4].

3) Se demostrará, en definitiva, que la lógica pertenece a un despliegue de *codimensión* cero.

Tenemos dos superficies, $\partial_x f$ y 0, que se encuentran transversal-mente en C. (Su dimensión es igual a (n+1)+(n+1)-(2n+1)=1, que es una curva). Típicamente, hay tres tipos de lugares [Fig. 3.2):

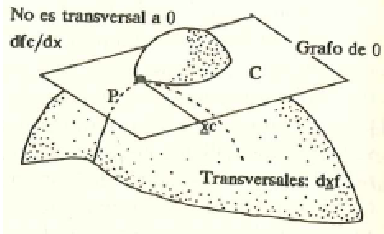


Fig. 3.2 Transversalidad

a) ə$_x$*f(.x,t)±0,* donde f es *regular.* Este resultado es la consecuencia de que no exista parametrización en esta zona.

b) Lugares donde $d_x f$ encuentra a 0 transversalmente. Son singularidades Morse, puntos críticos no degenerados

c) Lugares como P.

¿Cómo acercarnos a este punto? Podemos utilizar la formulación tayloriana. Hablaremos entonces de C como el conjunto de puntos en que la expansión de Taylor no posee término lineal (obviamos el término constante, poique lo que nos interesa son las *formas* y no los valores) [Fig. 3.2].

Estudiemos el término cuadrático. Alrededor de *P(x,y)* escribimos la función en su desarrollo de Taylor hasta el término cuadrático:

$$f(x,y) = p + ax^2 + bxy + cy^2 + d$$

donde p es constante y *a,b,c,* se hallan en términos de las segundas derivadas parciales:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \partial^2{}_{xx} & \partial^2{}_{xy} \\ \partial^2{}_{yx} & \partial^2{}_{yy} \end{vmatrix} = ?$$

¿Cuál es el tipo de la forma cuadrática? Es relativa al cono discriminante, pues la forma cuadrática $b^2 = ac$ puede, mediante un cambio de coordenadas (por ejemplo, haciendo que *u={a+c)/* √ *2; v=(a*-c) √ 2; *w=b* √ *2),* transformarse en el cono: $v^2 + w^2 = u^2$. Ahora la curva puede estar dentro, fuera, o en la superficie del cono.

Lo interesante es que, *excepto en casos aislados,* para valores de s tales como s=0 donde $C_{(s)}$ = P, la parte cuadrática es no degenerada. ¿Dónde es degenerada la curva? Será en aquellos lugares donde el hessiano de la fórmula cuadrática sea 0, pues es evidente que habrá funciones *f en* su vecindad en la que f>0 ó *f<0.* Pero el hessiano se anula en $ac = b^2$ y, entonces, por el teorema de *Splitting,* que permite separar en el potencial la parte regular de la parte no-regular, degenera sólo en la dirección *u.* Por tanto: $f(u,v,c) = f(t,u) \pm v^2$. Así puede ignorarse la variable *v,* pues se encuentra fuera del camino en que se halla la curva.

Analicemos esta función y hagamos que *u* sea *x.* Nos fijamos en / con mayor detalle, restringidos en la vecindad de 0 por lo que *=x-x_s, siendo s el tiempo en relación con la U-dirección, y recurrimos a la expresión de Taylor en un orden, v. gr., 4.

$f(x) = k + px^2 + qx^3 + rx^4$ + Tayl

Los coeficientes se hallan calculando las derivadas. Esto nos da una curva en el espacio tri-dimensional cuyas coordenadas son: *p,* q, r, tal que C= (p, *q, r).*

El polinomio P(x) queda estratificado en este orden:

- El estrato más singular es el origen: polinomio nulo.

- El estrato formado por el eje r, menos el origen. Polinomios rx^4

- El estrato formado por el plano (q, r). Polinomios $qx^3 + rx^4$.

- El estrato de los polinomios: $px^2 + qx^3 + rx^4$ [Fig. 3.3].

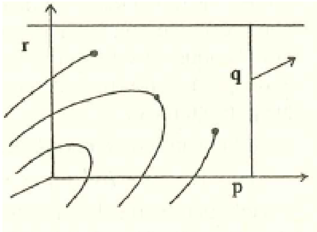


Fig. 3.3 Estratificación polinomial

Si el término p se anula, i.e., si la forma cuadrática es igual a cero, habrá puntos degenerados. Estos tienen que encontrarse en el plano de coordenadas (q, r). Si p se anula, típicamente q no se anula. Esto significa que la curva C y el eje r no se encuentran típicamente, pues dos curvas unidimensionales no se encuentran típicamente, son transversales. Así pues, $^{\text{Fig"}\ 33}$ Estratificación polinomial cuando f no tiene la forma px^2 + Tayl, esto es, como u^2, entonces puede reparametrizarse como qx^3 + Tayl. Por el teorema de Morse, puede reducirse a la forma u^3. En una familia un/-paramétrica, en consecuencia, encontramos puntos no singulares, u, puntos regulares, u^2, y puntos aislados (A Lo interesante es, entonces, que para polinomios de grado *n* (y no solamente de grado 4), una curva típica no se encontrará con el conjunto de polinomios para el que p = q = 0, porque la codimensión en todos los casos es 2. Podemos decir, entonces, que las funciones cuyas expansiones comienzan por una forma cuyo germen es x^4 (cúspide) definen un conjunto de dimensión 2. Si el germen es x^3, definen un conjunto de codimensión 1. Y si la función es reducible a formas cuadráticas, x^2, definen un conjunto de dimensión O[14]. Se ha llevado a cabo una ordenación: cada estrato pertenece al cierre de un estrato de codimensión inferior. Además, los elementos estructural-mente estables se colocan unos en relación con los otros. Ahora podemos introducir el concepto Espacio-yef, vinculando la fórmula de Taylor y la Geometría. Nos interesa en especial el espacio /|^4 de los polinomios P(A') = $px^2+qx^3+rx^4$, cuya figura se representa en la figura 3.4. Estos polinomios pueden reducirse a:

x^2 si $p \neq 0$.
x^3 si $q \neq 0$; $p = 0$.
x^4 si $r \neq 0$; $p = q = 0$

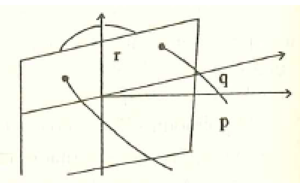


Fig. 3.4 Polinomio J_1^4

Pues bien, lo que nos importa señalar es que podemos, mediante cambio de coordenadas, detectar cómo se mueven los puntos cuyas coordenadas son (p, q, r), esto es, las direcciones mediante las cuales podemos perturbar la función coinciden con las que obtenemos mediante cambio de coordenadas. (Aunque su significado fundamental es el teorema de preparación de Malgrange, nos permite comprender la conexión Lógica-Morfología que perseguimos).

Sea el cambio de coordenadas siguiente:

$$y(x) = (1+\alpha)x + \beta x^2 + \gamma x^3 + \mathrm{Tayl}$$

Apliquemos un difeomorfismo local al polinomio *P(x)* (si a#-1) tal como:

$$P(y(x)) = p'x^2 + q'x^3 + r'x^4$$

siendo:

$$p' = (1+\alpha^2)p,$$
$$q' = 2(1+\alpha)\beta p + (1+\alpha)^3 q,$$
$$r' = (2(1+\alpha)\gamma + \beta^2)p + 3(1+\alpha)^2\beta q + (1+\alpha)^4 r$$

Podemos, entonces, inducir una aplicación lineal cuya estructura matricial queda como sigue:

$$\begin{vmatrix} p' \\ q' \\ r' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (1+\alpha)^2 & 0 & 0 \\ 2(1+\alpha)\beta & (1+\alpha)^3 & 0 \\ 2(1+\alpha)\gamma + \beta^2 & 3(1+\alpha)^2\beta q & (1+\alpha)^4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} p \\ q \\ r \end{vmatrix}$$

Si ahora hallamos las derivadas de la matriz *A* como funciones de a,B,Y, nos dará la dirección en que se mueve un punto (p, *q, r).* La matriz queda reducida a:

$$\begin{vmatrix} 1+2\alpha & 0 & 0 \\ 2\beta & 1+3\alpha & 0 \\ 2\gamma & 3\beta & 1+4\alpha \end{vmatrix}$$

y nos dice en qué dirección se mueve el punto (p, *q, r)* en J_1^4 por un cambio de variables. Aquí juega un papel central la k-determinación. Decimos que una función está k-determinada, en general, por su primera derivada no nula. Pero nos interesa una k-determinación en particular: cuando mediante un cambio de coordenadas en 0 nos da la matriz identidad, l:

$$I = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

ocurre, entonces, que las direcciones de sus curvas se preservan. En el caso en que a=0, y para un punto que esté en el eje *r,* en el plano *(q, r)* o en el espacio (p, *q, r)* podemos preguntarnos: ¿En qué dirección se mueve?

i) Para un punto sobre el eje *r,* no se mueve en ninguna dirección. Pues:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2\beta & 1 & 0 \\ 2\gamma & 3b & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{vmatrix}$$

así que queda como está.

ii) Para un punto sobre el plano (q, r), siendo la matriz identidad /,

tenemos:

$$\begin{vmatrix} M \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 \\ q \\ r \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ q \\ r + 3\beta q \end{vmatrix}$$

luego se mueve hacia arriba o hacia abajo en paralelo al eje r.

i i i) Para un punto en el espacio: (p, q, r), entonces:

$$|M| \begin{vmatrix} p \\ q \\ r \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} p \\ q + 2\beta p \\ r + 2\gamma + 3\beta q \end{vmatrix}$$

las direcciones son ahora paralelas al plano *(q,* r) [Fig. 3.5]. Considerando el teorema de Boole, que desarrolla la fórmula de Taylor bajo la ley del índice *x=x2,* se demuestra, por tanto, que la lógica pertenece a un despliegue de *codimensión cero* y que, por consiguiente, no se mueve en ninguna dirección.

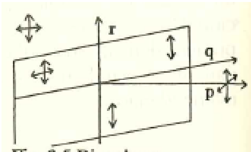


Fig. 3.5 Direcciones

¿Qué conclusión podemos obtener de este planteamiento? Lo que nos enseña es la capacidad de la TC para discriminar, *genéricamente,* las dos disciplinas: lógica y geometría, cuyas relaciones han sido tan confusas, desde Aristóteles y Euclides hasta los intentos de reducción logicista de Russel. La gnoseología de la TC nos permite considerar ahora la lógica como un *caso límite,* aquel en que coinciden todas las proyecciones de un espacio n-dimensional. Un caso límite que exige un análisis gnoseológico diferente. Por eso dirá Petitot, con razón, que estos puntos de codimensión cero, son puntos *fijos,* más que *estables.* El verbo «ser» sería el concepto fundamental de la lógica; una suerte de «nada semántica», el equivalente del estrato cero en el espacio de bifurcación de las funciones.

Hemos partido de la diferencia que hay entre distintos espacios *uní* y p/un-dimensionales desde la definición matemática de variedad continuamente diferenciable. Nuestra tesis queda formulada en una condicional cuya prótasis es, ella misma, una hipótesis sobre el surgimiento de la lógica:

"Si la Lógica como teoría formal de las demostraciones arranca en Aristóteles de un contexto biológico, pretendiendo simular los procesos de generación y corrupción, pero fracasa en este objetivo, entonces:

*Entendemos -la TC mediante-, que la lógica paraliza las degeneraciones sucesivas de los despliegues universales, desconectando los sig*nos *lógicos (unidimensionales) del espacio-sustrato (tridimensional) y, en consecuencia, la lógica es de codimensión cero y universal.*

Ciertamente que en muchos intelectuales, lingüistas y poetas se tiene el sentimiento de que la lógica es insuficiente. Recordemos a Borges: *"Si la literatura no fuera más que un álgebra verbal, cualquiera podría producir cualquier libro, a fuerza de ensayar variaciones. La lapidaria fórmula* Todo fluye *abrevia en dos palabras la filosofía de Heráclito. Raimuno Lulio nos diría que, dada la primera, basta ensayar los verbos intransitivos para descubrir la segunda y obtener, gracias al metódico azar, esa filosofía, y otras muchísimas. Cabría responder que la fórmula obtenida por eliminación, carecería de valor y hasta de sentido; para que tenga alguna virtud debemos concebirla en función de Heráclito..."*[19]

Pero dejarlo todo al sentido común, a la intuición... nos conduce a un subjetivismo incontrolado, al que no tenemos más remedio que oponernos. El análisis de este capítulo, sin excluir -y mucho menos, despreciar- la lógica, nos permite proseguir con el uso de formalismos.

EJERCICIOS

Las ambigüedades a que dan lugar los símbolos, utilizados desde el punto de vista *autoformante o heteroformante,* son una constante en la literatura: no podemos decir lo que sentimos, pues el lenguaje nos traiciona; intuimos algo, pero decimos otra cosa... Toda la hermenéutica externa -interpretación de los sueños, psicoanálisis, etc.- tiene su origen en la dificultad de pasar de los espacios n-dimensionales al espacio unidimensional de nuestro lenguaje. Los ejercicios que proponemos pueden ayudar a clarificar algunos conceptos que hacen referencia a esa ambigüedad.

1) Teniendo en cuenta la diferencia de los símbolos en sus sentidos uni- y n-dimensional, ¿qué papel estará atribuyendo la protagonista del siguiente texto a la Universidad?:

"Estoy fatigada. He releído lo que he escrito hasta ahora con cierta ansiedad. ¿Comprenderás algo? Muchas cosas se agolpan en mi cabeza, para salir se dan empellones entre sí, como las señoras frente a los saldos de temporada. Cuando razono nunca consigo mantener un método, un hilo conductor que con sentido lógico lleve desde el principio hasta el final. Quién sabe, a veces pienso que se debe al hecho de que nunca fui a la universidad". TAMARO,S.: Donde el corazón te lleve, Barcelona, 1994. p. 52.

2) En los siguientes textos se está utilizando la distinción entre totalidades atributivas y distributivas. ¿Qué tipo de totalidad serán la «virtud», el «rostro», la «barra de oro», los «principios», el «ejército», la «epidemia» o la «filiación»?

a) "-Fácil resulta, Sócrates, responder a esto: Al ser la virtud una, son partes las que mencionabas.

- ¿Son partes a la manera en que la boca, la nariz, los ojos, los oídos, son partes del rostro, o a la manera en que lo son las partes del oro, que en nada difieren entre sí y cada una con respecto al todo, excepto en la grandeza o la pequenez?". PLATÓN: Protágoras, 329d.

b) "Por tanto, estos conocimientos de los principios no están en nosotros completamente determinados; no proceden tampoco de otros conocimientos más notorios que ellos; vienen únicamente de la sensación. En la guerra, en medio de una derrota, cuando uno de los que huyen se detiene, otro se detiene también, y después otro y otro, hasta que se rehace el estado primitivo del ejército; pues el alma está constituida de manera que puede experimentar una cosa semejante (...) Desde el momento en que una de estas ideas, entre las que no hay ninguna diferencia, se detiene en el alma, enseguida ésta concibe lo universal; hay sensación de ser particular, pero la sensibilidad se eleva hasta ¡o general". ARISTÓTELES: Segundos analíticos, 100a.

c) "¿Cómo concebir un poblamiento, una propagación, un devenir, sin filiación ni producción hereditaria? ¿Una multiplicidad sin la unidad de un ancestro? Es muy simple y todo el mundo lo sabe, aunque sólo se hable de ello en secreto. Nosotros oponemos la epidemia a la filiación, el contagio a la herencia, el poblamiento por contagio a la reproducción sexuada, a la producción sexual... La diferencia es que el contagio, la epidemia, pone en juego términos completamente heterogéneos: por ejemplo, un hombre, un animal y una bacteria, un virus, una molécula, un microorganismo". DELEUZE,G y GUATTARI,F.: Mil mesetas, Valencia, 1988, p. 247.

3) ¿Qué tipo de símbolo sería la palabra «Pepe» en la siguiente anécdota?

"Pregunta el capitán a un recluta: «Y usted, ¿cómo se llama?» -«¿YO? -responde éste con aplomo- ¡Pues PEPE! ¿Cómo habría de llamarme si no?»"

4) En la siguiente charada, ¿de qué modo están tomadas las palabras «todo», «finaliza», «poner», y «cambiar»?

"Todo comienza por t y finaliza por f; sólo hay una p en poner y una c en cambiar". Repárese en esta otra charada popular: "CUATRO son SEIS, y SEIS son CUATRO". ¿Cómo usamos aquí los símbolos lingüísticos?

5) Estudiar la definición de Acto Perlocucionario de Austin en Cómo hacer cosas con palabras y verificar su carácter de Tautogoría:

"En tercer lugar, también realizamos actos perlocucionarios; los que producimos o logramos porque decimos algo, tales como convencer, persuadir, disuadir, e, incluso, sorprender y confundir (...) El acto perlocucionario que consiste en lograr ciertos efectos por (el hecho de) decir algo) (...) Al decir que le pegaría un tiro lo estaba amenazando (...) Porque dije que le iba a pegar un tiro lo alarmé".

6) Estudiar la siguiente definición de símbolo formal y destacar su componentes sintáctico y semántico:

"Insistimos en que las interpretaciones son ajenas a la descripción del sistema formal en cuanto tal. Debe ser posible proceder considerando los símbolos formales como meras marcas y no como símbolos en el sentido de símbolos ele alguna cosa a lo que ellos simbolizan o significan. Sólo se supone que estemos capacitados para reconocer cada símbolo formal como siendo él mismo en cada caso una de sus ocurrencias y como distinto de otros símbolos formales". KLEENE,S.: Introducción a la metamatemática, Madrid, 1976, p. 71.

7) Boole escribe:

"El álgebra lógica compondría sus términos por operaciones de suma y producto idempotentes, mientras que las operaciones matemáticas no son idempotentes".

¿En dónde radicaría la pertinencia del criterio de Boole para distinguir las matemáticas de la lógica:

(Sugerencia: la «idempotencia» es aspectual).

8) ¿De qué lógica se hablaría en un mundo en el que la suma de dos esferas (v. gr., de cera) más dos esferas diese como resultado tres esferas (si dos de ellas se fundiesen o la cera de una de ellas se distribuyese por las restantes? Intentar construir una lógica en la que $a + a + a = 2a$.

9) A la luz de los conceptos aquí expuestos, analizar esta reflexión de Ortega:

"Por racional o lógico entiendo ahora lo que siempre se ha entendido, a saber: el intelecto en su interno y propio funcionamiento, lo que él es por sí mismo o por su cuenta o por su lado, por tanto, el puro intelecto o razón pura. La lógica, ciencia del concepto, será, entonces, estrictamente racional. Pero ya el ser número contiene irracionalidades, esto es, contradicciones. Precisamente, en la matemática se descubrió lo irracional como tal, y se inventó el nombre de número irracional, que, como decían los griegos, era «un escándalo de la naturaleza». El ser de las figuras espaciales -por

tanto, la geometría- contiene todavía más irracionalidades, todavía más faltas de lógica, ya que la geometría es mucho menos lógica, puesto que el espacio mismo es por esencia irracional, porque es continuidad". ORTEGA y GASSETJ.: O.C. t. 12, p. 228.

CAPITULO 4 TOPOLOGÍA Y TEORÍA DE LAS CATÁSTROFES

La Topología nos conduce de manera natural al tratamiento de los Sistemas Dinámicos y al estudio de las Singularidades. El paso a la Teoría de las Catástrofes se hace sin ningún tipo de violencia, puesto que la Teoría Elemental de las Catástrofes (TCE) tiene por objeto la clasificación de las singularidades que aparecen en los sistemas de ecuaciones diferenciales, en el sentido ya mencionado de Poincaré [Cap. 2]. La TCE se despliega en un conjunto de conceptos matemáticos cuyos nudos categoriales podrían ser los siguientes:

1) Sistemas Dinámicos.

2) Gérmenes y Singularidades.

3) Despliegues y Estabilidad Estructural.

4) Clasificación de las Catástrofes.

5) Geometría de los espacios de control.

Las aplicaciones rigurosas a la Física no se cuestionan. Multitud de fenómenos físicos pueden ser estudiados desde sus infraestructuras catastróficas: las cáusticas en Óptica, la teoría de transiciones de fases en Termodinámica, las bifurcaciones en los Sistemas Diferenciales no lineales, etc.

Pero es en sus aplicaciones *hermenéuticas* a la Biología y a la Lingüística donde las expectativas provocadas por la TCE han sido más polémicas, porque ésta ha invertido la ontología del método científico *reduccionista* que, constituido casi como un dogma, pretende dar cuenta de los seres del universo a partir de las diversas partículas elementales («quarks», neutrinos...) y de sus interacciones mediante fuerzas básicas que determinan las apariencias, las formas de esos seres. Rene Thom propone, desde la TC, el método *estructuralista,* el cual parte de las apariencias, de los contornos aparentes de las formas, de los fenómenos, de las perspectivas de las cosas sensibles, etc., que, a pesar de su condición de entidades fenoménicas, se considerarán como determinantes para la constitución de los seres.

4.1. EL LENGUAJE Y LOS SISTEMAS DINÁMICOS (SSDD)

En el capítulo 2 fueron expuestos algunos elementos topológicos con una doble finalidad. En primer lugar, para familiarizarnos con conceptos cargados de «intuición» -por seguir la terminología kantiana- frente al formalismo «logicista» de las escuelas hilbertiana o bour-bakista. (Todavía hoy, en el mejor estilo lagrangiano[1], cabe encontrar libros de geometría en los que no hay ¡ni una figura!) Y en segundo lugar, para construir con su ayuda los lemas y las definiciones de algunos teoremas y corolarios -en cuya demostración no entraremos, por estar fuera de los objetivos de este libro-, los cuales vamos a tener que utilizar necesariamente si queremos exponer siquiera someramenete la teoría en la exposición de la Teoría de las Singularidades, de la cual la Teoría Elemental de las Catástrofes es la parte que se ocupa de la clasificación topológica de los sistemas de gradiente y sus diagramas de bifurcación. Este capítulo se escribe con el fin de exponer la teoría en sus elementos más abstractos y, en los siguientes, ésta se aplicará al estudio e interpretación del Lenguaje.

Los recorridos tradicionales para la comprensión del Lenguaje son de sobra conocidos. En breve esquema:

i) El estudio del lenguaje desde alguna lengua que se entienda como *primigenia:* el hebreo (creado por Dios e interpretado por el *Talmud...),* el griego (los analogistas del lenguaje como Platón o Aristóteles)...

ii) El estudio del lenguaje como siervo de la *intuición* (Descartes) o de las *representaciones* psicológicas de nuestra mente (Locke).

iii) El estudio del lenguaje por relación a un lenguaje *bien hecho* (Leibniz, Condillac, Boole...) o a un lenguaje *formalizado* (Frege, Wittgenstein, Russell...).

iv) El estudio del lenguaje como *pragmática,* como expresiones de muy diversas *formas de vida* (Wittgenstein, Austin, Searle...).

v) A estos métodos añadiremos el semántico-topológico que estamos estudiando en este libro: el estudio del lenguaje entendido como un proceso morfogenético cuyos componentes son *rupturas, bifurcaciones, despliegues,* etc. (Thom, Petitot, Wildgen...).

Geometrización de la Termodinámica

La literatura científica de los últimos años ha desarrollado una nueva línea de investigación, la Teoría de los Sistemas Dinámicos, que se suma a las dos grandes aportaciones del siglo XX a la Física: la Teoría de la Relatividad y la Mecánica Cuántica. La complejidad de los Sistemas Dinámicos Generales los había relegado a problemas difíciles o irresolubles debido a las limitaciones del investigador -subjetivas o técnicas- para hacerse con todas las variables, pues sólo podían ser dominados a través de estudios termodinámicos cuyos parámetros -temperatura, presión, etc.- son muy groseros por no tenerse en cuenta la estructura más fina de *la topología de los atractores* del sistema. Es esta investigación, que comenzó a desarrollarse a partir de Poincaré [Cap. 2], la que aclara la frase tan sorprendente de Thom: *«Hay que reemplazar la Termodinámica por la Geometría».* Lo que en realidad pretende Thom es Geometrizar la Termodinámica, eliminar de las consideraciones termodinámicas aquellos aspectos de carácter medible y estocástico, y caracterizar geométricamente los *atractores,* su estabilidad o su inestabilidad. Nos iremos acercando poco a poco a esta concepción.

Sistemas Expansivos y **de Gradiente**

En general, se puede hablar de dos grandes modelos en la teoría de los Sistemas Dinámicos: i) aquellos que han recibido el nombre de «Física del Caos» -o, con mejor tino, de «Sistemas Expansivos»-, y se caracterizan por la presencia de *atractores* dotados de una topología muy compleja, los llamados *atractores extraños* [Cf. *infra].* Estos modelos, abiertos a grandes expectativas y resultados, estudian los sistemas en los que trayectorias que se inician en puntos muy cercanos se alejan de tal manera del punto-origen, que su previsión se hace imposible, aunque, paradójicamente, sean sistemas deterministas. Una causa muy pequeña puede producir un efecto muy grande. Se ha hecho ya tópico mencionar aquí el «efecto mariposa», debido al meteorólogo Lorenz: el aleteo de una mariposa en Brasil puede provocar un tornado en Texas.

ii) Hay, no obstante, otros modelos cuyos atractores están dotados de una topología simple: son puntos o mínimos de un potencial de gradiente más asequible a la investigación científica, que se conecta aquí con el pensamiento aristotélico cuando trataba de demostrar cómo de pequeñas alteraciones y en virtud de ciertos principios, pequeños en magnitud pero grandes en potencia, se pueden seguir incluso los contrarios, como el macho y la hembra.[5] Dado que un potencial puede describirse mediante líneas de pendiente y variedades de nivel, se nos permite intuir el concepto de Estabilidad Estructural como la propiedad que caracteriza un sistema que tiende a un estado de minimización de la energía, al menos localmente. Un potencial con estas características se llama de *gradiente* y puede imaginarse como un conjunto de riachuelos que bajan por la colina hasta el valle, en donde desembocan a una laguna. De este tipo de sistemas se ocupa la Teoría Elemental de las Catástrofes, por lo que, desde este punto de vista, la Física del Caos o de los Sistemas Expansivos vendría a ser una Teoría de las Catástrofes Generalizada (TCC). Thom mismo distingue entre los modelos *estático* para la TCE y *metabólico* para la TCG.

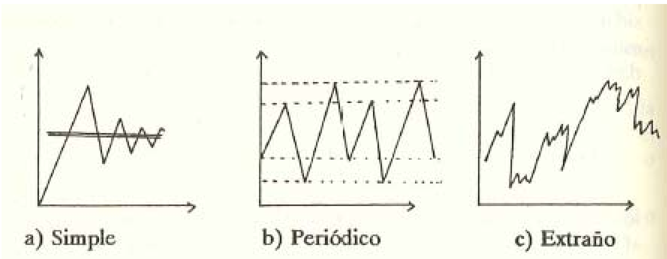


Fig. 4.1 Atractores

Atractores

Un *atractor,* topológicamente, es un cerrado, X-invariante e indescomponible, que atrapa o captura asintóticamente todas las trayectorias de su vecindad. O, dicho de otra manera, no es más que la solución de una función diferenciable (o un sistema de funciones diferenciables), en la cual todas las trayectorias convergen. A medida que transcurre el tiempo, las trayectorias pueden alcanzar un punto de equilibrio, o un ciclo (solución *periódica),* o una solución caótica *{atractor extraño)* [Fig. 4.1]. No es difícil imaginar, entonces, una situación en la que estos atractores entren en competición y provoquen conflictos entre sí: *saltos bruscos o repentinos, bifurcaciones, transiciones de fase...* -en una palabra: *catástrofes-,* que afectan internamente al sistema. Estas situaciones exigen la definición de *Sistema Dinámico.*

Sistemas Dinámicos (SSDD)

Un Sistema Dinámico puede analizarse a partir de los siguientes conceptos:

i) Un *proceso interno, X,* en general ¡nobservable, se formula como un sistema dinámico de ecuaciones diferenciales sobre un espacio *M* o variedad compacta, provisto de una métrica riemanniana de parámetros internos (x_1,...,x_n) del *SD,* tal que: $d(x\text{-}_i)/dt$ = f_i (x_1….x_n), donde fes un parámetro temporal y fias funciones diferenciables. El espacio interno de un sistema cualquiera con suficiente complejidad es *multi-dimensional,* puesto que cada punto está determinado por *n* coordenadas. A cada punto x de *M* se le asocia un vector tangente (vector velocidad) $X_{(x)}$ de M en *x,* vector que varía diferenciablemente con *x.* Dado un campo de vectores diferenciables sobre *M,* integrarlo consiste en hallar en M todas las curvas diferenciables parametreadas por el tiempo f.

Los estados internos X entran en competición (Heráclito) según una *instancia de selección I,* que actúa de dos maneras diferentes: $/_1$) Algunos sistemas permanecen en equilibrio «tanto como pueden», hasta el mismo momento en que desaparecen. El estado del sistema *depende del estado anterior* y podría decirse que *recuerda* de dónde procede, que tiene *memoria.* Es por esto por lo que se asocian a esta regla -que es denominada *Regla de retardo*- los fenómenos de Histéresis y conviene elegirla para las interpretaciones biológicas del *SD.*

I2) Otros sistemas se caracterizan porque evolucionan hacia el estado de más baja energía -según el proceso de minimización energética de los sistemas de gradiente-, independientemente de si el potencial va de izquierda a derecha o viceversa. Es conveniente usar esta regla -que se conoce con el nombre de *Regla de Maxwell*- en las interpretaciones físicas de los *SSDD.* En este caso no hay efecto de memoria; simplemente el atractor dominante deja de serlo y se puede decir que conoce la situación «globalmente» [Fig. 4.2].

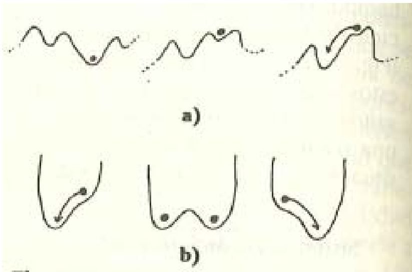


Fig. 4.2 Reglas de Retardo y de Maxwell

ii) Este proceso está controlado por un cierto número de *parámetros exteriores,* el espacio de *control Wque* determina (aunque no unívocamente, porque el espacio *M* no es lineal) las variables internas y la localización de los mínimos. Así que el proceso Xdepende del valor wdel espacio de control W_w.

Las Dinámicas internas se rigen por el principio de la competición de estados y los cambios cualitativos que esta competición provocan en el comportamiento de un sistema se explicitan por medio del concepto de *bifurcación,* que se utiliza habitualmente en el estudio de la Dinámica No-Lineal para describir un cambio repentino en la conducta de cualquier sistema cuando varía algún parámetro. La Bifurcación descompone la conducta del sistema en dos regiones: una por encima y otra por debajo del valor del parámetro que toma, allá donde se produce el cambio. A estos sistemas se les llama *no lineales* porque, dicho abruptamente, el resultado es mucho más (o mucho menos) que la suma de sus partes; sus resultados son sorprendentes o complicados o caóticos. Un ejemplo muy sencillo lo aclara. Sea la ecuación $f(x;w)=x^3-wx$. Para $w\leq 0$ tiene una solución; para $w>0$ posee tres soluciones. En la vecindad de (0,0) un pequeño cambio de *w hacia* el eje positivo, digamos +0,0001 o hacia el negativo, digamos -0,0001, hace cambiar el sistema radicalmente.

iii) Un *SD* se definirá, ahora, como un campo continuo en donde se establece una aplicación entre el espacio de control externo y el espacio de control interno, s: W->X, que asocia a cada punto wde Wun punto X_w en el espacio *M.* Esto supone que al cambiar el valor de los parámetros *w* de *W,* cambia el estado interno X del *SD.* Por ejemplo:

SD = Sistema termodinámico considerado: agua calentándose en una cacerola.

X= Las fases termodinámicas: gas, líquido, sólido.

l= Principio de minimización de la energía libre de Gibbs.

W= Presión, temperatura...

Cuando en estos sistemas los parámetros de control alcanzan ciertos valores, aparecen discontinuidades. Estos valores se denominan *críticos* y producen saltos bruscos o transformaciones rápidas, las llamadas *catástrofes,* lo que da una idea de la mala elección de la palabra «catástrofe». Los saltos catastróficos, en efecto, no tienen por qué ser destructivos, como sugiere el término en cuestión en su sentido ordinario,[7] sino que pueden ser constructivos, creativos o, si queremos, indiferentes a todo valor, como las transiciones de fases que se producen en los Sistemas Dinámicos. Estos saltos, cambios, rupturas, etc. tienen como consecuencia final la transformación fenomenológica del sistema: el sistema *aparece,* se manifiesta de otra manera; sus *contornos* y *siluetas* cambian, etc., etc.

Es necesario entender, por tanto, cómo algunos sistemas que interiormente son caóticos -por el gran número de partículas que contienen- pueden ser exteriormente estables y ordenados; cómo de lo indescriptible emerge lo descriptible; cómo es posible la relativa simplicidad de las morfologías observables a partir de la complejidad de los estados complejos inobservables.

4.2. ELEMENTOS DE LA TEORÍA DE LAS CATÁSTROFES (TC)

¿Qué pretende explicar la TCE entendida como una parte de la Teoría de los Sistemas Dinámicos? La cuestión central es la de dar cuenta de los objetos comprendidos como *formas* (ειδοζ) o *morfologías* (μορφη). La Mecánica clásica rechazó el estudio de las formas, al despreciarlas como puras cualidades subjetivas, e introdujo un postulado epistemológico que distinguía entre cualidades primarias y secundarias. El interés se limitaba a los fenómenos continuos como las órbitas de los planetas, las trayectorias de las balas de cañón, etc, y relegaba al resto de los fenómenos, como el desarrollo de un embrión, la formación de un embrión, etc. a meros fenómenos subjetivos o teleo-lógicos, a simples nombres: *"Habiendo ya visto* -escribía Galileo-*cómo muchas sensaciones que son consideradas como cualidades residentes en ¡os sujetos externos no tienen realmente más existencia que en nosotros, ya que fuera de nosotros no son sino nombres..."*. La TCE pretende, por contra, recuperar la investigación de la génesis de los objetos y sus fines. *"Por mi parte considero* -confiesa Thom- *que la forma, entendida en una acepción extremadamente general, es un concepto infinitamente más rico y sutil que el de fuerza, un concepto bastante antropocéntrico que reduce prácticamente un ser a un vector"*

Singularidades y Gérmenes

El concepto matemático asociado al objeto morfológico y alrededor del cual se realiza esta investigación es el de *Forma, Estructura* o *Carácter Geométrico-topológico* de los objetos. Así que el reto estriba en arrancarlo de los componentes subjetivos y darle un estatuto de objetividad, como se ha conseguido ya, pongamos por caso, para las órbitas planetarias, que, a través de las ecuaciones de Newton, han dejado de ser esferas movidas por ángeles; las trayectorias de las lanzas que han dejado de estar manejadas por diosas y dioses según sus preferencias por este o aquel guerrero, etc. Aquí encuentra un lugar pertinente el concepto de *difeomorfismo* [Cap. 2]: dos objetos geométricos son topológicamente equivalentes si pueden transformarse el uno en el otro de manera continua sin romper ni pegar parte alguna ni producir pliegues ni alisarlos. Nos proveemos así de un criterio para comparar *formas:* dos *morfologías* poseerán el mismo tipo topológico si son *difeomorfos.*

Pero si la clave no puede ser más sencilla -las distintas formas se caracterizan por sus límites, sus fronteras, sus fracturas-, la herramienta matemática -la topología diferencial- no puede ser más compleja. Aquí trataremos de hacerla intuitiva y, a la manera de la aceptada «Teoría Intuitiva de Conjuntos», podríamos hablar de una **«Teoría Intuitiva de la Teoría de las Catástrofes».**

Estos límites, fronteras, fracturas... tienen asimismo un asociado en matemáticas: las *singularidades.* Una forma se distingue de otra por los distintos puntos singulares. Por ejemplo, una nariz exige tres puntos singulares: dos mínimos y un máximo:). Da igual que la nariz sea roma, puntiaguda, carnosa, etc, etc. Si no tuviese ninguna singularidad no sería una nariz:) ; y si tuviese, por ejemplo, dos máximos y tres mínimos, podría ser una nariz «con un grano»:}. Así que, *grosso modo,* tenemos dos grandes clases de puntos: unos *regulares* y otros *singulares.* ¿Cómo distinguir unos de otros y cuál es su naturaleza? Topológicamente diremos que los puntos *regulares* son abiertos R_w de *W,* el abierto de la estabilidad de las cualidades observables. Un punto regular de Wtiene un valor w del control tal que las cualidades observables q_w' varían suave y continuamente, pero son *cualitativamente invariantes,* i. e., estables. Los puntos *críticos,* por el contrario, son topológicamente cerrados K_w de los valores *w* del control, tales que, al menos, una cualidad observable sufre una discontinuidad. Ese cerrado K_w se llama *conjunto catastrófico del SD,* o bien *Morfología externa.*

Las matemáticas tradicionales han desarrollado la teoría de las funciones diferenciables de los mínimos y de los máximos. El criterio que se utiliza para funciones de *una* variable es el de hallar su derivada en un punto [Cap. 3], Si la derivada de la función es diferente de cero, el punto se llama *regular.* Si es cero, el punto se denomina *singular,* porque en esos lugares cambia la dirección de la función. Así que los puntos regulares se reparten entre los puntos singulares que han de ser aislados (por la hipótesis de compacidad [Cap. 2]). Para funciones de más de una variable, conviene utilizar el criterio del *hessiano* de *fen* t/, que se define como la matriz formada por las derivadas parciales de la función: si el hessiano de /'en u es de rango maximal, o su determinante es no-nulo, el punto crítico es *no-degenerado* y se escribe:

Hfl $_{x,y}\neq 0$. Si su determinante es cero, Hfl$_{x,y}$=0, el punto se llama degenerado [Fig. 4.3].

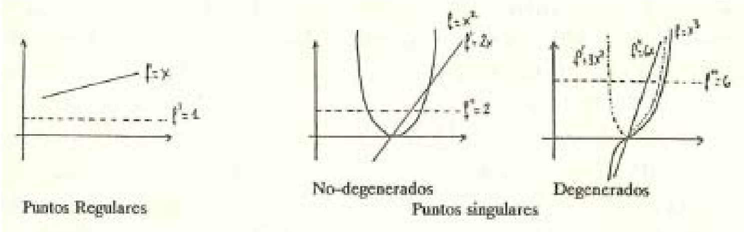


Fig. 4.3 Puntos regulares y singulares

Pero las matemáticas han desarrollado también otra teoría de una fertilidad impresionante: las propiedades de un potencial en un punto están gobernadas por el término de la *expansión de Taylor en* ese punto [Ver cap. 3]. Cuando la función está gobernada por parámetros también depende de ellos en los coeficientes de la serie. Para ciertos valores de los parámetros de control, estos términos se anulan y cambian las propiedades cualitativas de la función. Así que los términos de la serie que permanecen determinan las propiedades de la función en un punto.

Se llamará *germen* de la función el término de la serie de Taylor que permanezca una vez hayan desaparecido los términos que se eliminan por transformación de coordenadas; por ejemplo, el término constante que sólo sirve para subir o bajar la gráfica y aquellos otros que desaparecen al anularse los parámetros externos o de control. Esto es lo mismo que que decir que el *germen* está por los coeficientes de la serie de Taylor. El germen podrá ser, entonces, *lineal x, cuadrático* x^2*, o superior* x^n ($n \geq 3$). Este concepto nos permite el estudio de las funciones consideradas *local-mente,* en la vecindad de cualesquiera puntos, y las situaciones locales son mucho más manejables que las globales. *Local,* en este terreno, significa asociado a una singularidad. Por ejemplo, una cuerda, local-mente, puede ser una recta o una curva, pero nada más. Si consideramos las funciones *f*= x^3 - 3x y $g = x^2$*,* globalmente son diferentes, pero en los puntos *{f;* 1, -2) y *(g;* 0, 0) son equivalentes [Figura 4.4].

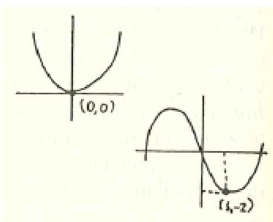


Fig. 4.4 Local y global

Podremos ahora asociar las singularidades a los gérmenes y a los potenciales de gradiente. Para acercarnos al mundo particular de las morfologías de nuestra experiencia terrena, podríamos reformular y acotar la definición de potencial de gradiente como: «la derivada de la energía potencial respecto de la distancia a la superficie de la tierray. Tenemos así tres posibilidades que podemos estudiar aparte.

1ª. Que el sistema de gradiente sea distinto de cero en un punto *x.* $\nabla V \neq 0$: puntos regulares y germen lineal.

2ª. Que el sistema de gradiente sea igual a cero en un punto: $\nabla V = 0$ y la matriz hessiana diferente de cero: $Hf|_x \neq 0$: puntos singulares no degenerados y germen cuadrático.

3ª. Que el sistema de gradiente sea igual a cero: $\nabla V = 0$ y la matriz hessiana igual a cero, $Hf|_x=0$: puntos singulares degenerados y germen superior.

1º. **Puntos regulares**. Si el gradiente del potencial es distinto de cero, $\nabla V \neq 0$, y la fuerza correspondiente en un punto U_Q tiene un componente no nulo, se permite realizar un cambio de coordenadas en la vecindad de ese punto tal que la fuerza no se anule. O, dicho en lenguaje más intuitivo, que la información no se destruya. Estos puntos $U_O$en matemáticas se llaman *no-críticos* y en física, *inestables.* Es posible elegir un nuevo sistema de coordenadas tales que en la vecindad de un punto la fuerza del

potencial tenga un componente que no se anule. Este cambio de variables lo garantiza el Teorema de la *Función implícita.* Se dice que una función *f(x,y)* define implícitamente las funciones *g(x)* y *g'(x),* si *f(x, g(x))* y *ftx,* g'(x))=0. Supongamos que la función *f(x,y)* es la función circunferencia f(x,y) = x^2+y -r=0. Se verá que no es una función en su sentido estricto, i.e., que cada argumento del dominio tenga solamente una imagen, pues todo punto del eje de las x posee dos imágenes. De tal manera que, v. gr., una calculadora no es capaz de dibujarlo a la vez; entonces lo que se hace es dibujarlo por partes: primero g = $\sqrt{}$ (x^2-*r)* y luego *g'*= - $\sqrt{}$ (x^2-r); se dice entonces que la función contiene implícitamente a *g(x)* y *g'(x).* Pero, además, se observará que hay dos puntos: $A = r$ y $B = -r$, en los que no es posible encontrar tal función. Pues bien, el Teorema de la Función Implícita nos permite utilizar un criterio para hallar una función que no produce cambios cualitativos en la naturaleza de *f(x)* en la vecindad del punto regular o no-crítico; esto significa que las funciones pueden *estabilizarse* [Fig. 4.5].

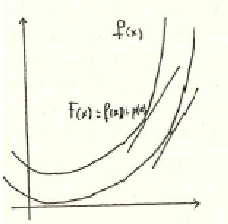


Fig. 4.5 Regulares

2ª. Puntos Morse. Pero si el sistema se encuentra localmente en equilibrio, entonces habrá puntos UQ en los que el gradiente se anule, $\nabla V = 0$. La condición necesaria para que exista un punto estacionario es que las primeras derivadas se anulen y para ello hay que tener en cuenta el término lineal; el término constante no interviene en la respuesta, pues, como ya señalamos, ellos sólo suben o bajan la gráfica; los términos decisivos son los cuadráticos, ya que los términos de orden superior no tienen efecto en la cuestión del mínimo local, aun cuando pueden impedir que ese mínimo sea global. V. gr., $\pm x^3$ empujará siempre a la función hacia $\pm\infty$, independientemente de lo que suceda en $x=y=0$. Sabemos que un punto es genérico o *no-degenerado* o *Morse,* síi la derivada segunda se anula en el punto U_0, y *degenerados]* no se anula.

Para aproximarnos localmente a un punto, venimos diciendo que la herramienta más potente es la Serie de Taylor. Podemos saber qué ocurre alrededor de un punto crítico aproximándonos a él mediante un desarrollo tayloriano. Si *u* es un punto crítico no degenerado de *f,* su serie de Taylor puede escribirse como:

$\mathrm{Tf(U)} = \mathrm{f}(u) + hf(u) + \ldots h^n f(u)/n! + \ldots$

donde f^n es la n-ésima derivada de *f.*

La serie puede *troncarse* en el orden $\mathrm{j}^k f(u) = f(u) + hf(u) + \ldots\ \mathrm{h}^k\ \mathrm{f}^k(u)/k!$

A esta serie *truncada* se la denomina y'etde orden *k,* lo que ha permitido obtener un resultado fundamental. Morse ha demostrado que si el hessiano de una función /dada en una variedad suave y compacta *M* en un punto *u* es maximal, entonces la función está determinada en el orden 2, i.e., es equivalente a su *jet* de orden 2. Alrededor de ese punto existe un sistema local de coordenadas curvilíneas, en las que el potencial viene expresado por la forma cuadrática: $V = \sum \pm x_¡^2$, y podemos olvidar lo demás. Los tres puntos Morse en dos variables son:

máximo $(f=-x^2-y^2)$, el mínimo $(f= x^2 + y^2)$ y el punto silla $(f= x^2-y^2)$. Estos puntos matemáticamente se llaman *críticos* y físicamente, *puntos de equilibrio.*Miremos más detenidamente al germen de la función $y = x^3$, que tiene un punto degenerado en el origen. Podemos perturbarlo mediante la adición de un monomio tal que: $y = x^3+ \in x$. Para x<0 ocurre que cambia el tipo cualitativo, pues ahora la función posee un mínimo y un máximo. Esto ¿qué significa? Pues que la función tiene singularidades que no son puntos críticos degenerados -como ocurre con el germen-, sino puntos tipo Morse. Podemos intuir, entonces, que un germen con una singularidad degenerada puede resolverse en una función con singularidades no-degeneradas o Morse, lo que equivale a decir que no se producen cambios cualitativos en la naturaleza de *Ax)* en la vecindad del punto regular o no-crítico [Fig. 4.6].

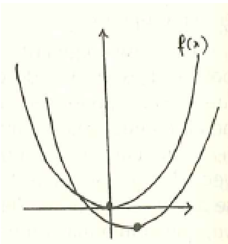


Fig. 4.6 Puntos Morse

3ª. **Puntos degenerados.** Ahora bien, si el hessiano es nulo, entonces, necesitamos otra fórmula canónica para expresarlo. El Teorema de Descomposición *(Splitting)* separa la parte estable de la parte inestable.

El interés de este teorema es mostrar que se puede separar -en caso de degeneración-una parte cuadrática estable y una parte que concentra toda la inestabilidad:

V = Parte Catástrofe + $\sum \pm$ x¡2,aunque nada dice sobre la determinación de esa parte inestable o *germen.* Este teorema nos permite conocer solamente el número de direcciones en que degenera un punto crítico. Este número se denomina *corrango,* y viene a ser la contrapartida matemática de la cláusula latina *ceteris paribus,* que significa: del resto de variables se puede prescindir [Fig. 4.7].

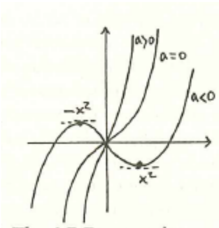


Fig. 4.7 Degenerados

Despliegues y **Estabilidad Estructural**

Los Teoremas de *Morse-Splitting* indican y justifican la fuente de inestabilidad de una familia de funciones: i) Por la degeneración de los puntos críticos (catástrofe de bifurcación regida por la instancia de selección l1). ii) Por la igualdad de los valores críticos (catástrofe de conflicto regida por la instancia de selección *l2* o de Maxwell). Podemos *medir, computar,* la inestabilidad de una función *f,* estructuralmente inestable: i*) Definiendo su grado de degeneración, ii*) Estableciendo sus valores críticos. Esta medición está determinada por el *número de variables de estado* de la función. Si la función es de una variable, *f(x),* entonces el comportamiento de los puntos críticos depende del primer jet no nulo de su desarrollo tayloriano; si es de dos variables *f(x,y),* dependerá de su *corrango.*

Pero lo realmente fundamental para cualquier organismo animal o humano -tanto que en ello nos va la sobrevivencia de la especie, la vida individual e incluso la tranquilidad de ánimo de los humildes- es el reconocimiento estable de las formas, de los contornos, de las siluetas..., y que seamos capaces de interpretar las formas exteriores como *alimento,* como *enemigo,* como *protector...* A la pregunta práctica de: «¿Qué forma es esa que se me aparece?» el organismo ha de responder según la situación vivida. A la misma pregunta, desde la teoría, hay que responder mediante los conceptos topológicos de *despliegue* y de *estabilidad estructural.* (Éste es el óbolo que hay que pagar por alcanzar la inteligibilidad; para la sobrevivencia son suficientes los impuestos).

Si es perturbado convenientemente, un *germen* inestable alcanzará la estabilidad. Volvemos al «Teorema de Thom»[Cap. 2] en su noción clave de *despliegue.* El germen es inestable porque hay funciones muy cercanas a él que no poseen el mismo número de singularidades. Pero si le vamos añadiendo términos, el germen inestable se convierte en estable; este despliegue es *universal* si el número de parámetros utilizados en el despliegue es mínimo y, en cualquier otro caso, versa/. El teorema clave es, entonces, el de que todos los despliegues de la misma singularidad son equivalentes. La sombra de Aristóteles vuelve a hacerse patente en el contexto de la TC. *"Esta idea* -señala Thom- *rehabilita y puntualiza en cierto modo el par aristotélico potencía/acto".* La potencia une diversas formas de ser y anuncia y prepara la realización de morfologías diversas. El germen de la singularidad -que ahora llamaremos *centro organizador*- es, por su interna inestabilidad, inobservable, excepto cuando con la introducción de los parámetros de control -despliegue universal- se convierte en *estructuralmente estable,* noción que definimos escuetamente: «Un elemento de una función es estructuralmente estable si *resiste* pequeñas deformaciones a las que se ve sometida la función».

La Estabilidad Estructural es un principio de razón: un fenómeno existe sólo si es estructuralmente estable; lo que asegura la estabilidad estructural es su *logos,* como gusta decir Thom. No hay que tener miedo a las palabras. Ese *logos* no es un mero nombre, sino una entidad algebraico-geométrica que nos disponemos a determinar matemáticamente. Podríamos entenderla como una *condición de existencia* en el sentido kantiano, una condición sin la cual no es posible pensar siquiera los objetos morfológicos.

4.3. CLASIFICACIÓN DE LAS SINGULARIDADES SEGÚN LA TC

El teorema de *Splitting* nada nos dice de la estructura interna o naturaleza de la parte degenerada. Aquí es donde interviene la genialidad de Thom: el Teorema de Thom clasifica la parte catastrofista del teorema de *Splitting.* Definimos entonces el conjunto catástrofe, *K,* como aquellos puntos en el espacio control, R^K para los que la función f_w tiene un germen degenerado que puede sufrir catástrofe. La pregunta, entonces, es inmediata: ¿Qué tipos de catástrofes pueden ocurrir? El resultado se halla a partir ele los gérmenes degenerados y despliegues de esos gérmenes de manera completa. La estrategia es como sigue:

1º-. Se buscan todos los gérmenes con valores reales, es decir clases de equivalencia tal que posean las propiedades de ser *difeomorfos* y de preservar la misma orientación.

2°. Se eliminan los gérmenes no-simples. El teorema de Splitting nos da el concepto de *corrango,* que mide el número de direcciones independientes que degeneran en un punto crítico.

3º. Se trazan todos los posibles despliegues del germen degenerado simple. La dimensión *W* del despliegue universal viene dada por la *Codimensión* [Cap. 2], que es el número de dimensiones que le falta a una subvariedad para llenar la familia en la vecindad de un punto. La *codimensión* mide el grado de inestabilidad de un punto.

Combinando el Corrango y la Codimensión, los dos invariantes de la teoría, obtenemos **las siete Catástrofes Elementales.** Ya sabemos que para estabilizarse un sistema de familias co-paramétricas es obligatorio que haya una relación entre las variables de estado y las variables de control. Dibujamos, entonces, un cuadro combinatorio de este tipo:

	VARIABLES DE CONTROL (*a, b, c, ...*)			
VARIABLES DE ESTADO (*x,y,...*)	*x / a*	*x / a,b*	*x / a,b,c*	...
	x,y / a	*x,y / a,b*	*x, y / a,b,c*	...
	x,y,z / a	*x,y,z / a,b*	*x,y,z / a,b,c*	...
	....	...	...	...

Si limitamos las variables de control, la Codimensión, a un número manejable en el mundo de la ontología especial, por ejemplo a 4 -puesto que todos los sucesos del mundo físico están controlados por cuatro variables: 3 del espacio y 1 del tiempo-, y si, además, nos interesamos por las aplicaciones físicas, no se pierde nada restringiendo el estudio de los fenómenos morfológicos a cuatro dimensiones. De esta manera, las variables no pueden ser un número mayor de dos. Con lo que el cuadro combinatorio queda reducido a:

		CODIMENSIÓN (*a,b,c,d*)			
		1	2	3	4
CORRANGO (x,y)	1	x a	x a,b	x a,b,c	x a,b,c,d
	2			x,y a,b,c	x,y a,b,c,d

Al vincular los gérmenes con los despliegues, las *catástrofes elementales* quedan así:

CLASES	GÉRMENES	DESPLIEGUES
A_2	$x3$	$x^3 + ax$
$A_{\pm 3}$	$\pm x^4$	$x^4 + ax^2 + bx$
A_4	x^5	$x^5 + ax^3 + bx^2 + cx$
$A_{\pm 5}$	$\pm x^6$	$x^6 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx$
D_{+4}	$x^2y + y^3$	$x^2y + y^3 + a(y^2 - x^2) + bx + cy$
D_{-4}	$x^2y - y^3$	$x^2y - y^3 + a(y^2 + x^2) + bx + cy$
D_5	$x^2y + y^4$	$x^2y + y^4 + ax + by + cx^2 + dy^2$

Los despliegues de corrango 1 forman la clase *A,* llamada de las *cuspoides;* A_2 es denominada *pliegue;* $A_{\pm 3}$, *cúspide* y su dual; A_4, *cola de milano;* $A_{\pm 5}$, *mariposa* y su dual. Los despliegues de corrango 2 forman la clase *D* o de las *umbílicas.* D_{+4} es denominada *umbílica hiperbólica;* D_{-4}*, umbílica elíptica;* D_5*, umbílica parabólica.* Estas formas limitan, constriñen fuertemente las posibles morfologías.

A las singularidades mencionadas habría que añadirles algunas otras llamadas de *transición,* que no se corresponden con esta combinatoria simple. Por ejemplo, la catástrofe llamada *bec {pico),* que comprende un punto de inflexión simple (una catástrofe *pliegue),* cuyo valor crítico es igual al valor de un punto crítico cuadrático.

4.4. LA GEOMETRÍA DE LOS ESPACIOS DE CONTROL

El aspecto más interesante de la TC es su capacidad para hallar el conjunto de puntos críticos degenerados que organizan las propiedades cualitativas globales de la familia de funciones. Determinaremos las *separatrices* o *campos de bifurcación* y visualizaremos los espacios de control. Conociendo los puntos críticos aislados de un potencial, conoceremos la dirección de las fuerzas de potencial y, a continuación, sus propiedades cualitativas. Los seis apartados en que dividiremos el análisis de cada una de las *catástrofes elementales* son: i) el potencial y su espacio de fases; ¡i) la superficie de equilibrio; iii) el conjunto de singularidades; iv) el conjunto de bifurcación o separatriz; v) el tipo cualitativo de conducta; vi) La estratificación del espacio de control.

A_2: *LA SINGULARIDAD «PLIEGUE»*

Es la singularidad más simple de todas. La constituyen funciones cuyo potencial es del tipo $V(_{a;x})$, esto es, funciones de corrango 1 y de codimensión 1 (parámetro a).

i) La variedad estándar, *potencial* o catástrofe A_2 corresponde a la ecuación:

$V(_{a;x}) = 1/3\ x^3 + ax$ El *espacio de fases* es bidimensional, R^2, y sus coordenadas son: (x,a) [Fig. 4.8 V],

ii) La *superficie de equilibrio,* M, de los puntos críticos, es la variedad de R^2, formada por todos los puntos críticos del potencial, que son aquellos cuya derivada se anula:

$M = 0 = d/dx\ V(_{a;x}) = x^2 + a$. Los valores de $V''(_{a;x})$ en los puntos críticos, esto es, en $x^2+a=0$; serán, por tanto, $x=\mathrm{l}a\mathrm{l}^{1/2}$

La parábola obtenida, $M = \{(x,a)\mathrm{I}x^2 + a\}$, se llama también *variedad catástrofe.* Para representar M, simplemente se dibujan las coordenadas (x,a). Sobre el eje *x* se representa el punto general de M, según la igualdad $(X,a) = (x, -x^2)$, puesto que si $x^2 + a = 0$, entonces $a = -x^2$ [Fig. 4.8 M].

iii) El *conjunto de las singularidades* $\sum$ es el subconjunto de la superficie de equilibrio, /VI, se halla resolviendo la segunda derivada del potencial: $\sum = 0 = d^2/dx^2\ V(_{a;x}) = 2x$ y, por tanto, el único punto singular es aquel donde se cumple $x = 0$.

iv) El *conjunto de Bifurcación K* es la proyección (difeomorfismo) de la *superficie ele equilibrio,* /VI, sobre el espacio de control (x,a). Como éste sólo contiene un parámetro, se representa por una línea recta a. Ahora bien, como la variedad de catástrofe $M = x^2 + a$ es una cuadrática, posee dos raíces reales con un coeficiente o bien positivo o bien negativo: por tanto, *K* puede dibujarse como una recta dividida por un punto: *el punto pliegue* [Fig. 4.8 K].

En resumen, la *variedad catástrofe* es una parábola; el *conjunto de bifurcación* o *separatriz* de los dos tipos cualitativos, un punto simple, a. A la izquierda de este punto hay dos estados: un máximo y un mínimo; a la derecha no hay ninguno. La catástrofe ocurre cuando el punto cruza el eje de control a.

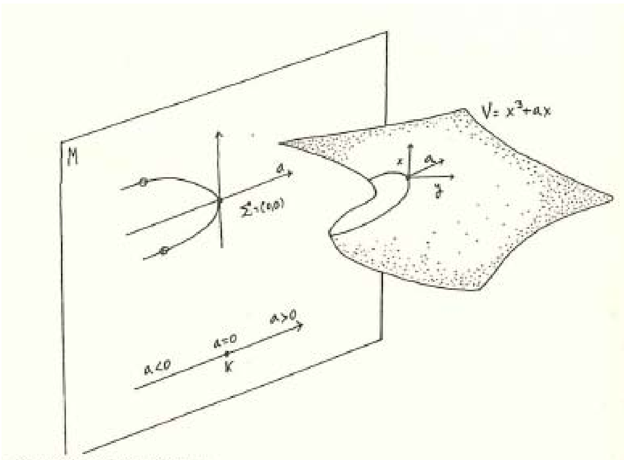


Fig. 4.8 Catástrofe «Pliegue»

v) *Tipo Cualitativo de Conducta:* Esta catástrofe no es demasiado interesante, porque cuando el potencial alcanza un mínimo es estable; si el factor de control hace que el potencial llegue al punto crítico, entonces se hace inestable y se destruye el sistema. Si $V_{(a,\ x)}$ se interpreta como la energía potencial de un sistema, entonces los mínimos ofrecen los equilibrios *estables.* Los restantes puntos representan los equilibrios *inestables.* El único punto estable es $|a|^{1/2}$ para a negativo. Al aproximarse a a=0, desaparece. Esto representa una transición rápida de un estado de equilibrio a otro de no equilibrio, resultado de un cambio continuo de parámetro: una *catástrofe.* Como ejemplos podemos imaginar una goma elástica o un globo que se hincha hasta alcanzar sendos puntos críticos, más allá de los cuales goma o globo se rompen y ya no queda ninguna tensión que medir.

A_3: *LA SINGULARIDAD «CÚSPIDE»*

Pasemos a las funciones de tipo $V_{(a,b;\ x)}$, organizadas por una singularidad x^4, un punto crítico degenerado, de corrango 1 y de codimensión 2.

i) La familia de funciones o *potencial* viene dada por la ecuación:

$V_{(a,b;\ x)}$ = 1/4 x^4 + 1/2 ax^2 + *bx* que es el potencial del sistema (1/4 y 1/2 se utilizan para facilitar los cálculos).

El espacio de fases es tridimensional, R^3, de coordenadas *(x,a,b)* [Fig. 4.9].[12]

ii) La *superficie de equilibrio* o *variedad crítica, M,* será aquella variedad (superficie regular) de R^3, formada por todos los puntos críticos del potencial V, esto es, todos los puntos en los que *M* = 0:

V(a,b;x) = *d/dx* (1/4 x^4 + ax^2 + bx) = x^3 + *ax* + *b* = 0 La superficie obtenida se define así: *M* = {(x, a, *b)* x^3 + *ax* + *b]* ¿Cómo podemos representar *M* en una gráfica? Realmente lo que se pretende es dibujar la ecuación x^3+ax+b=0. Se fija un valor para a; entonces un punto (x,a,b) pertenecerá a la ecuación síi: x^3 + ax + b = 0, esto es, si b = -ax - x^3 En la figura 4.9 /VI se dibuja esta superficie, indicando las coordenadas.

iii) Dada *M,* hemos de encontrar los puntos críticos *degenerados* del potencial, el subconjunto de *M* en el que se anula la segunda derivada:

0 = d^2-/dx^2 $V_{(a;x)}$ = $3x^2$ + 2a que es el *conjunto de singularidades* E; de donde x = ± √-a /3, y hay dos puntos pliegues de equilibrio que forman una parábola. Para recuperar A4, se define el difeomorfismo, θ:∑ —> *M,* que va de la singularidad a la variedad [Fig. 4.9 I]

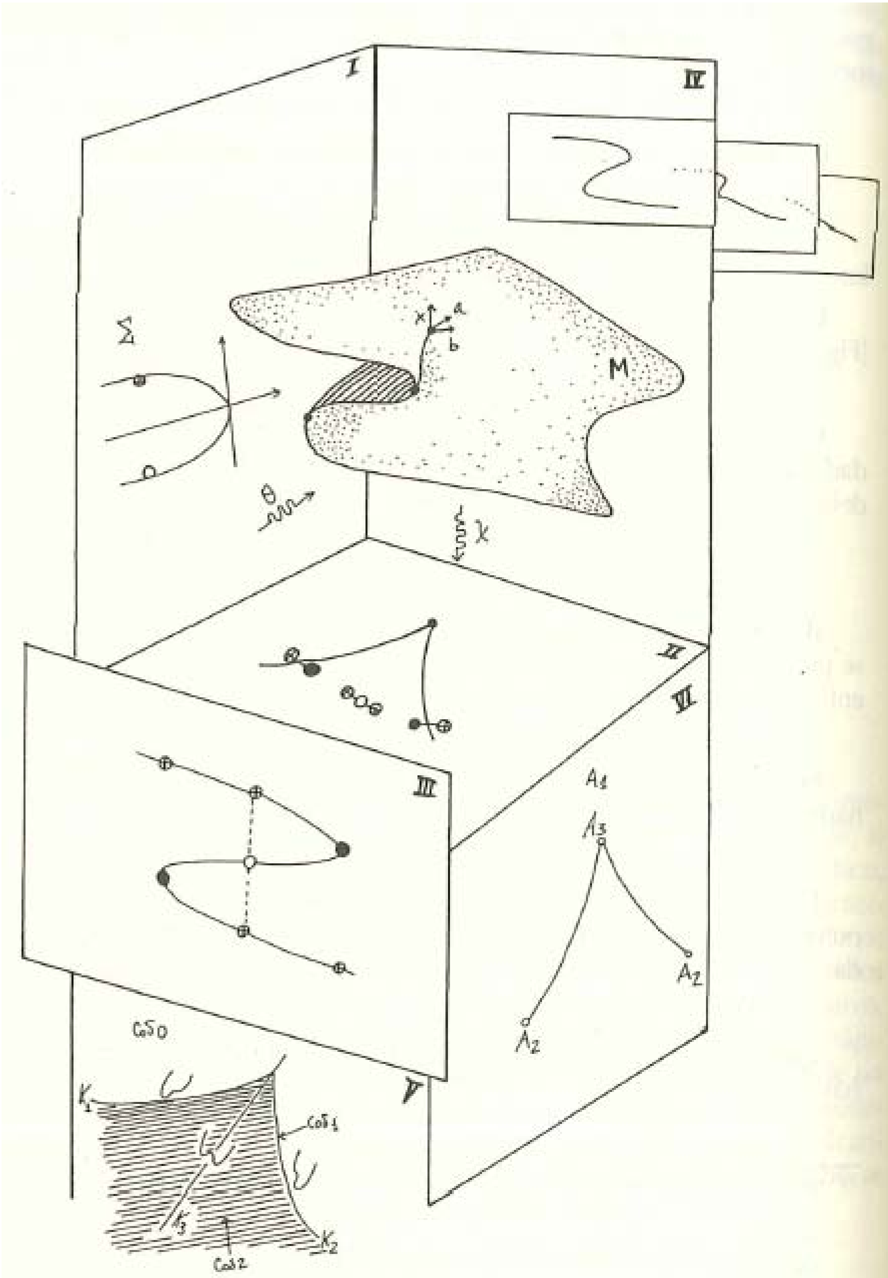


Fig. 4.9 Catástrofe «Cúspide»

iv) Queremos proyectar, ahora, el conjunto *M* sobre el espacio de control (a, *ti)* para obtener el *conjunto de bifurcación, K,* que, sin duda, es el punto más interesante del análisis geométrico. La variedad de catástrofe es $M = x^3 + ax + b$ y el subconjunto de los puntos críticos es $\sum = 3x^2 + 2a$. La forma más directa de relacionar los parámetros a y *b,* es eliminar la variable x del sistema $\{M,\sum\}$:

$$M = x^3 + ax + b = 0$$

$\sum = 3x^2 + a = 0$

Se obtiene la famosa ecuación paramétrica: $27b^2 + 4a^3 = 0$

La proyección del conjunto crítico sobre el espacio de control revela la *separatriz,* que se puede representar como una curva con un punto de retroceso, que consta: de un punto *(a,b)* = (0,0) -la parte *Kn* del conjunto catástrofe de bifurcación *K-,* y de una curva pliegue, según la ecuación: $27b^2 + 4a^3 = 0$ -las partes K_1 y K_2, que, unidas por el punto (0,0) adquieren la forma de una «cúspide» y de ahí el nombre que ha recibido la singularidad- [Fig. 4.9 II].

v) *Tipo de conducta.* Para establecer las propiedades cualitativas del potencial $V_{(a,\, b;x)}$, estudiamos los puntos críticos o soluciones de la ecuación. El numero de raíces está determinado por el discriminante $\Delta = 27b^2 + 4a^3$ del sistema $\{W,\sum\}$:

Si $\Delta < 0$, entonces hay tres raíces reales diferentes. Si A > 0, entonces hay una raíz real y otra conjugada. Si $\Delta = 0$, entonces hay tres raíces reales que coinciden. Se indican los puntos tanto en el plano de control *(a,b)* [Fig. 4.9 II] como en el plano *(x,b)* [Fig. 4.9 III].

Si se proyecta este plano *(x,b)* sobre diferentes planos $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ de acuerdo con la aplicación,

$R^2 \text{ -> } M: (x,b) \text{ -> } (x, a\text{-}ax\text{-}x^3)$

podemos desplegar todas esas singularidades de la siguiente manera: para cada elección de a se define una curva en el espacio *(x,b)* en uno de los planos α y, «apilando» todas esas curvas (según técnicas de la geometría algebraica), se obtendrá la superficie o variedad catástrofe M de partida [Fig. 4.9. IV].

El número de raíces y el espacio de control están vinculados, ya que los puntos singulares de la variedad M se corresponden con las zonas que divide la separatriz [Ver el difeomorfismo χ de la figura]:

según los valores que tomen los parámetros (a,b), así será el estado del potencial en relación a la curva discriminante del conjunto de bifurcación. En la figura 4.9 V puede comprobarse cómo la cu*rva-separatriz* divide al plano en cinco partes: a) Los puntos que «caen» en el interior de la curva, /. b) Los puntos en el exterior de /. c) y d) Los puntos de las ramas $K_{(1)}$ y $K_{(2)}$ El punto de origen *O.* Si el plano de control *(a,b)* pertenece a *E,* entonces hay una sola raíz real. Si (a,¿) pertenece a /, entonces hay tres raíces distintas. Si *(a,b)* pertenecen a $K_{(1)}$ *o* $K_{(2)}$, hay tres raíces reales, pero dos coinciden. Si (a,b) pertenece al punto 0, hay tres raíces reales, pero dos coinciden. Por consiguiente, para el potencial $V_{(a,\ b;x)}$ sabemos que existen ciertas clases de equivalencia en una vecindad suya.

vi) El despliegue universal expresa todas las maneras que existen de estabilizar el potencial por pequeñas deformaciones. Es natural pensar que esa estabilización puede llevarse a cabo por etapas sucesivas haciendo decrecer en cada uno de ellas el grado de inestabilidad en una unidad y, en consecuencia, se puede asociar a $V_{(a,\ b;x)}$ un grafo tal que describa todos los pasos inestables intermedios entre V y todas sus estabilizaciones.

Para llevar a cabo la estratificación, hay que medir el grado de inestabilidad y ya hemos indicado que éste es medido por la *codimensión.* Así que la estabilidad se alcanzará añadiendo las dimensiones necesarias para llenar el espacio total. El espacio de control quedaría estratificado de la siguiente manera:

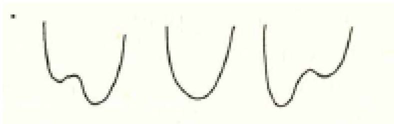
- En *E* hay un mínimo estable y de codimensión 0.

- Dentro de / en el estrato de conflicto /C3 hay dos mínimos ¡guales y un máximo inestable de codimensión 2.

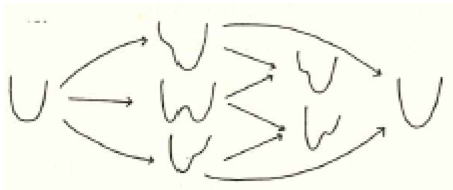
- La parábola semicúbica, o estrato de bifurcación, está compuesta de tres estratos. Por una parte, en cada una de las ramas K_1 o K_2 hay un mínimo y un punto de inflexión inestables y de codimensión 1. Por otra, en el origen, O, que corresponde al centro organizador, hay un mínimo inestable de codimensión 2.

Los mínimos, dinámicamente, corresponden a estados de equilibrio. Los máximos y los puntos de inflexión, a estados de inestabilidad. Por lo tanto, en *E* hay un único equilibrio estable, mientras que en / hay dos estados de equilibrio estable y uno inestable [Fig. 4.9 VI].

Ahora podemos enumerar los tres tipos de estabilidad que corresponden a las siguientes singularidades:



así como los tipos intermedios:



***

El tipo de conducta caracterizado por la catástrofe en cúspide es el más valioso para el mundo real y el más usado, como se verá en el capítulo 6, donde se la interpretará en términos de significado lingüístico. En cierta manera, las críticas a la teoría de las catástrofes provienen de identificarla casi absolutamente con este modelo. Así, entre los «pecados científicos» *(sic)* que Bunge predica de Thom se encuentra el *"empleo repetido y casi exclusivo de un único modelo para representar (sin explicar) multitud de procesos diferentes, a saber, la catástrofe cuspidal"*.

A_4: *LA SINGULARIDAD «COLA DE MILANO»*

La singularidad x^5, un punto de inflexión degenerado, organiza la catástrofe llamada «cola de milano», cuyo potencial es de tipo $V_{(a, b, c ;x)}$ funciones de corrango 1 y codimensión 3.

i) El potencial de A4 corresponde a la ecuación:

$V_{(a,\, b,\, c\, ;x)} = 1/5\, x^5 + 1/3\, ax^3 + ½\, bx^2 + cx$

El *espacio de fase* es tetradimensional (x,a,b,c), por lo que sólo puede ser representado a través de proyecciones, secciones, cortes, etc. [Fig. 4.10]

ii) Los puntos críticos se hallan en *M* = 0. De donde:

$V_{(a,\, b,\, c\, ;x)} = d/dx = x^4 + ax^2 + bx + c = 0$ (4.1)

Dada la imposibilidad de representar la *superficie de equilibrio,M*, dibujamos una sección particular de ella que sea interesante. Por ejemplo, fijando las coordenadas *(x,b,a)* para c> 0 [Fig. 4.10 M].

Si proyectamos el plano (x,a) sobre distintos planos $\alpha_1 ... \alpha_n$ de acuerdo con la aplicación R^2 -> M: *(x,c)* -> (x, $bx - ax^2 - x^4$) se despliegan las singularidades como en el caso anterior y al apilar las curvas obtenemos la variedad catástrofe. Los apilamientos geométricos tienen una lectura física como «propagación de fuente de ondas»[13], considerando el parámetro *a* como el tiempo sobre el plano-espacio; al propagarse, el frente barre una superficie en el espacio-tiempo [Fig. 4.10 11].

iii) Una vez obtenida M, buscamos los puntos *degenerados* del potencial. El *conjunto de singularidades* ∑ es el subconjunto de *M* que satisface la ecuación:

$V''_{(a,\, b,\, ;x)} = 4x^3 + 2ax + b = 0$

Entonces $b = 4x^3 + 2ax$. Si hacemos que *b=0* y derivamos, obtenemos: $12x^2 - 2a$. Así que si a<0 el conjunto de singularidades consta de puntos pliegues; si a>0, habrá dos cúspides A±3 en los puntos $\pm\sqrt{a/6}$ [Fig. 4.9 I].

iv) El *conjunto de bifurcación* viene dado por el sistema de ecuaciones que se forma derivando tantas veces como parámetros universales tiene el despliegue:

$K(a,b,c)= \qquad x^4 + ax^2 + bx+c=0$

$K(a,b)= \qquad 4x^3 + 2ax + b = 0$

$K(a)= \qquad 12x^2 + 2a = 0$

de donde la representación paramétrica de la curva C: $a = -6x^2$; $b = 8x^3$; $c = -3x^4$

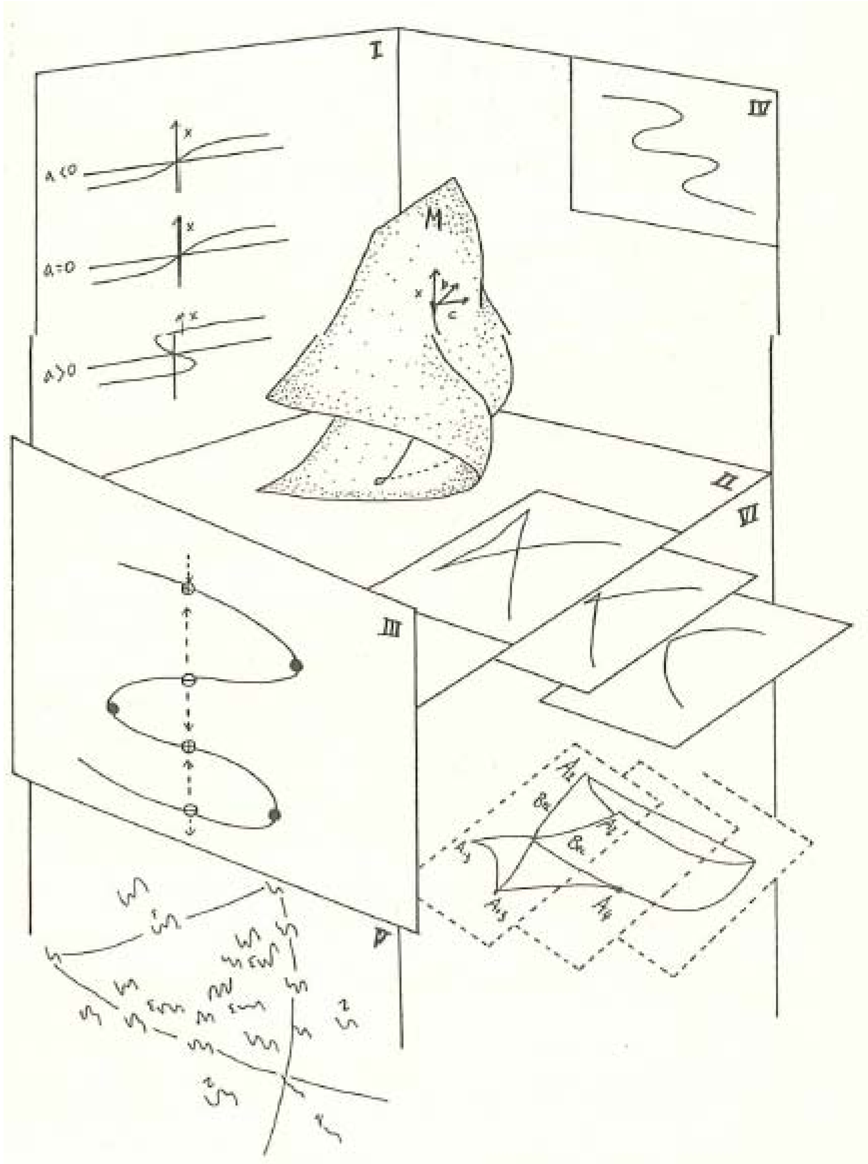


Fig. 4.10 Catástrofe «Cola de Milano»

Si se trazan tres secciones para los valores a<0, a=0, a>0, entonces la *separatriz* en el espacio de control se puede representar como una arista de rebotadura con dos puntos de retroceso, que permiten imaginar -para a negativo- una «cola de milano» o de «golondrina», de donde procede su nombre. Hallando los puntos de bifurcación sobre el plano *(b,c),* se obtiene la figura 4.10 II, formada por todas las tangentes a la curva (*a,b,c*). Divide a R^3 en tres regiones abiertas. Si se unen ahora esos planos, «apilándolos» en una figura tridimensional, se obtiene el conjunto de bifurcación tridimensional de la figura 4.10 VI.

v) *Tipos de conducta:* Las propiedades cualitativas del potencial cambian al ir atravesando la superficie de control. Para determinar los tipos de conducta de estas regiones conviene buscar los puntos singulares convenientes. Consideraremos el caso más interesante, cuando *b=0* y a < 0. Entonces la ecuación (4.1) toma la forma:

$(x^2)^2 + ax^2 + c$, que tiene por soluciones: $x^2 = -a\pm\sqrt{}$ (a/b)2-c; asf que:

- Para a>0 y c>O, y para a>0 y $c>(a/b)^2$ no hay soluciones reales.

- Para c<0 hay dos soluciones reales, pero una es negativa, luego hay un máximo y un mínimo.

- Para $0<c<(a/b)^2$ hay cuatro soluciones reales, esto es, cuatro puntos críticos: dos máximos y dos mínimos [Fig. 4.10 III].

Por pequeñas deformaciones el punto singular, x^5, puede explotar sea en cuatro puntos cuadráticos -dos mínimos y dos máximos- sea en dos puntos cuadráticos -un mínimo y un máximo-. Estos puntos pueden «emerger» de la singularidad x^5, en donde se hallan virtualmente colapsados y desde donde se despliegan todas las relaciones posibles entre sus valores críticos.

Los puntos estables corresponden, pues, a:

a) Tipo estable 1
Ningún punto crítico

b) Tipo estable 2
Un mínimo y un máximo

c) Tipo estable 3
Dos mínimos y dos máximos

En la figura 4.10 V se dibujan los puntos estables en negrita. La *separatriz* consta de un punto cero-dimensional que describe una función con un punto crítico degenerado cuádruple. Puede explotar: en dos curvas con puntos críticos degenerados triples; en una curva con puntos degenerados dobles; y en tres superficies con puntos degenerados dobles.

vi) Los conflictos de régimen se darán allá donde se presenten dos mínimos. Esto ocurre en el interior del triángulo curvilíneo de la cola de milano, cuando $c<0$. Se produce así una estratificación del plano de control con las siguientes clases de equivalencia:

a) Los estratos de codimensión 0. Localizamos o ninguno o dos o cuatro puntos críticos no degenerados.

b) Los estratos de codimensión 1:

- Transición del tipo 1 al tipo 2:
  - un punto pliegue, tipo 4.
- Transiciones del tipo 2 al tipo 3:
  - un punto de inflexión, tipos 5_1, 5_2
  - un punto de inflexión, tipos 6_1, 6_2
  - un punto de inflexión, tipo 7
- Transiciones entre los diversos tipos de 3. Se hallan cinco tipos distintos de conflicto:
  - un par de mínimos iguales, tipos $8_{2\text{-}4}$, $8_{3\text{-}5}$
  - un par de máximos iguales, tipos $8_{3\text{-}4}$, $8_{4\text{-}5}$
  - una singularidad tipo *x*3, tipo $8_{1\text{-}2}$

c) Los estratos de codimensión 2. Encontramos:

- Transición del tipo 4 al tipo 5_1 y del tipo 4 al tipo 6_1:
  - una singularidad doble pliegue;
- Transición del tipo 5_1 al tipo 5_2:
  - una singularidad de tipo *bec*$_1$;
- Transición del tipo 6_1 al tipo 6_2:
  - una singularidad de tipo *bec*$_2$;
- Transición del tipo 5_2 al tipo 7:
  - un punto cúspide;
- Transición del tipo 6_2 al tipo 7:
  - un punto cúspide;
- Transición de los tipos 3_2 - 3_3 - 3_4 - 3_5:
  - un punto doble de conflicto.

d) Los estratos de codimensión 3. Hay Una singularidad de tipo x^5.

Ahora podemos completar la figura 4.10 V al incorporar los pasos que conducen de unos puntos estables a otros y la figura 4.10 VI al señalar los lugares en los que se configura la estratificación de la *separatriz*.

***

Es una singularidad muy inestable, por lo que se utiliza para interpretar aquellos procesos que desaparecen tras realizar alguna manifestación que, en consecuencia, resulta efímera. Si en los modelos biológicos, incluso físicos, la *cola de milano* tiene poca significación, en lingüística son muy relevantes. En el capítulo 7 estudiaremos esta catástrofe en relación al problema del No-ser.

A_5: LA SINGULARIDAD «MARIPOSA»

El centro organizador de la «mariposa» x^6 es un mínimo degenerado donde la tangente corta la curva en seis puntos confundidos y cuyo potencial es de tipo $V_{(a, b, c, d;x)}$ de corrango 1 y de codimensión 4.

i) El potencial *A$* corresponde a la ecuación: $V_{(a, b, c, d;x)} = 1/6\ x^6 + 1/4\ ax^4 + 1/3\ bx^3 + 1/2\ cx^2 + dx$

El *espacio de fases* es R^5 y el espacio externo de despliegue universal es de dimensión cuatro (de acuerdo con los parámetros *a, b,* c, *d),* que no se puede dibujar. Buscamos, pues, alguna sección (o secciones) ¡nteresante(s).

ii) La *superficie de equilibrio* está formada por los puntos críticos del potencial en donde se anula la primera derivada

$M = 0 = d/dx\ V_{(a, b, c, d;x)} = x^5 + a\ x^3 + bx^2 + cx + d$ Como no podemos representar *M* directamente, se dibuja una superficie de coordenadas *(x,c, d)* para 6=0 y a>0, que ofrece el aspecto de la figura 4.11 M.

iii) Buscamos ahora los puntos *degenerados* por derivación y hallamos el *conjunto de las singularidades* que satisface la ecuación:

$V_{(a, b, c\ ;x)} = 5x^4 + 3ax^2 + bx + c$ y que se representa bajo la proyección al plano (x,c) para valores *a* >0, a = 0; *a<0* [Fig. 4.11I].

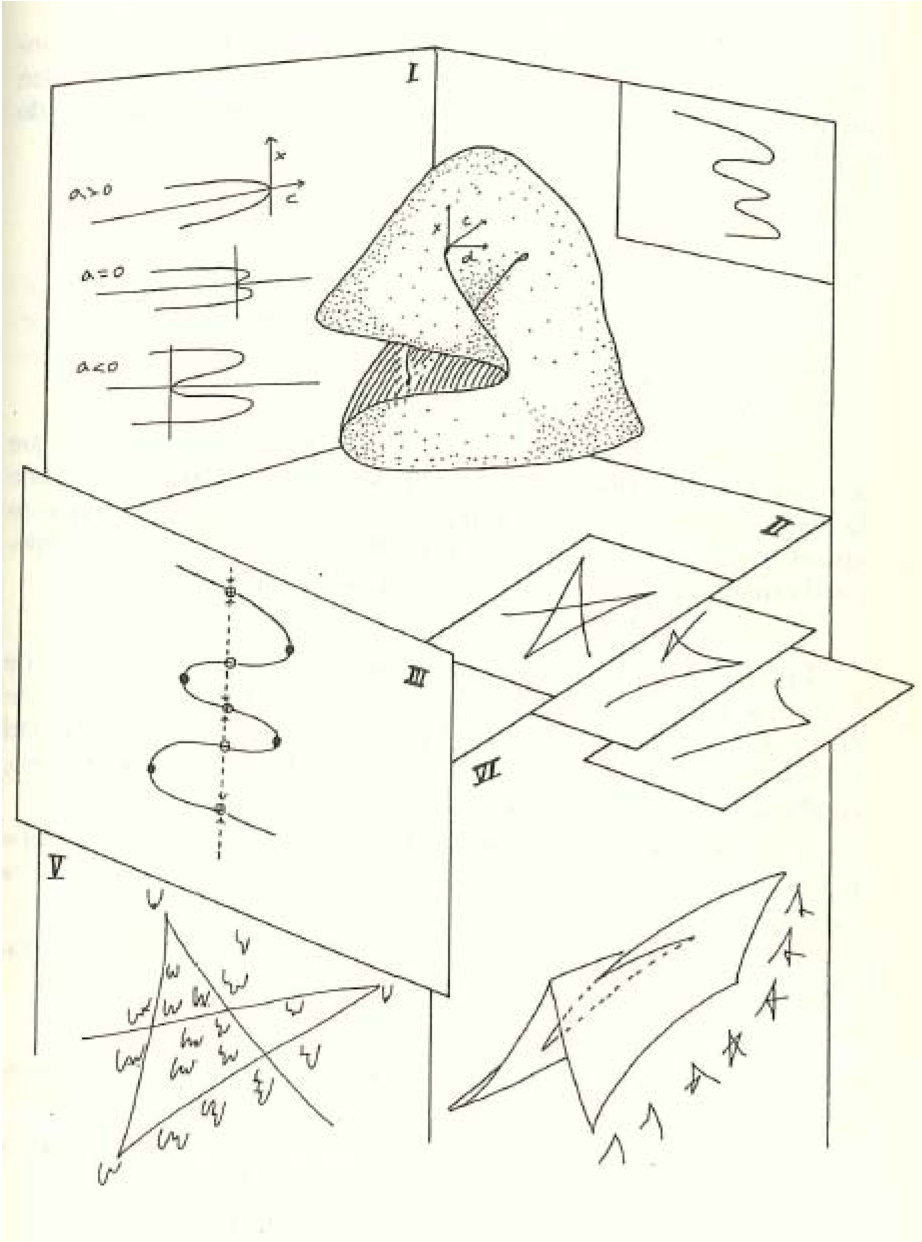


Fig. 4.10 Catástrofe «Mariposa»

iv)

Para visualizar el *conjunto de bifurcación, K,* vamos buscando las proyecciones sobre los distintos planos de control que pueden aislarse: *(a,b), {a,c), (b,c).* Para ello se deriva sucesivamente de acuerdo con la capacidad de despliegue de la singularidad:

$k(a\ b\ c)^{=} \qquad V'^{=} x^5 + a\,x^3 + bx^2 + cx + d$

$$V'' = 5x^4 + 3ax^2 + 2bx + c$$

$$V''' = 20\,x^3 + 6ax + 2b$$

de donde la representación paramétrica:

$b = -1Ox^3 - 3ax; c = 15X^4 + 3ax^2; d = -6x^5 -ax^3$

Si ahora damos valores respetando el convenio anterior por el que *a*< 0 y o=0, y dibujamos su proyección sobre el plano *(c,d),* se obtiene la figura 4.11 II, que se puede representar corno dos cúspides que se cruzan uniéndose por uno de sus dos pliegues dando lugar a una especie de «mariposa», de donde esta singularidad toma su nombre.

v) *Tipos de conducta:* Estudiemos los puntos críticos o soluciones de la ecuación. Los conflictos de régimen asociados a esta singularidad se encuentran en el interior de la curva mariposa, donde la variedad catástrofe $V_{(a,\ b,\ c,\ d;x)}$ tiene cinco raíces reales. Puede haber, pues, conflicto éntrelos fres mínimos.

Sea la sección transversal del conjunto de bifurcación para *b*= *d* = 0. Entonces la *superficie de equilibrio* toma esta forma: $M = x^5 + ax^3 + ex$, con una raíz x = 0 y cuatro raíces para $x^2 = -a/2 \pm \sqrt{}\ (a^2 - 4c)$

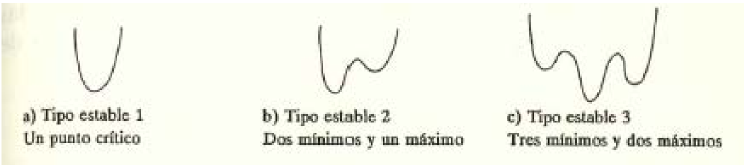
Si *a* > 0 y c < 0, x^2 es real y hay tres equilibrios estables, dos estables y uno inestable.

Si a < 0, pueden ocurrir tres casos:

- Que c < 0. Entonces hay tres equilibrios, dos estables y uno inestable.

- Que 0 < c < a^2/4. Entonces hay cinco equilibrios, tres estables.y dos inestables.

- Que c a^2/4. Hay un solo equilibrio estable. [Fig. 4.11 IVb], El germen x^6 presenta en el origen un mínimo degenerado obtenido por colapso de 5 puntos críticos, 3 mínimos y 2 máximos. El despliegue es el resultado de hacer variar la altura de los máximos y mínimos de todas las maneras posibles. Los tipos estables son, por consiguiente:



vi) La complejidad de los pasos intermedios entre las formas estables e inestables puede servir como ejercicio para el lector, a semejanza del realizado con la singularidad «Cola de milano». Solamente ofrecemos algunas transformaciones del espacio de control en la figura 4.11 VI.

* * *

El espacio de control de la singularidad «mariposa» es muy rico y, por consiguiente, acoge situaciones muy diversas. Los parámetros de control son cuatro, lo que produce una estratificación muy compleja de tres capas o secciones; de ahí que la sección intermedia represente una especie de compromiso entre las otras dos, y sirva de modelo para situaciones en las que aparece un compromiso entre estados de conflicto o en las que las secciones exteriores se ponen en contacto a través de la sección intermedia.

Las Umbílicas

En el caso de las *cuspoides* se prescindía de la variable *y,* puesto que el subespacio $y = 0$. Pero en el caso de las umbílicas hay que tener en cuenta esta segunda variable. Para evitar hacer nuestra exposición sobre las umbílicas más prolija de lo necesario, nos atendremos a ciertos elementos que nos parecen decisivos para su comprensión, eludiendo los cálculos en la medida de lo posible.[14]

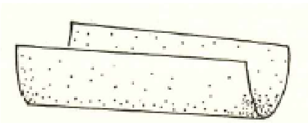
D_{+4}: *«UMBÍLICA HIPERBÓLICA»*

Funciones cuyo potencial es de tipo $^{V}(a,b,c;x,y)$ con dos variables internas y tres parámetros de control:

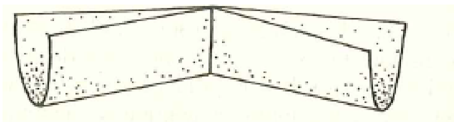
i) El potencial de D_{+4} corresponde a la ecuación:

$$^{V}(a,b,c;x,y) = x^2 y + 1/3\ y^3 + a(y^2 - x^2) + bx + cy$$

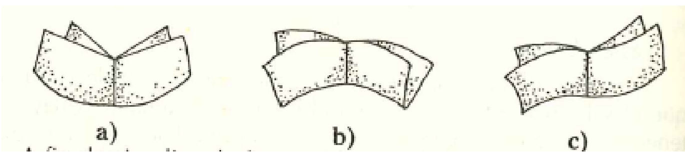
El espacio de fases de las *umbílicas* es más complejo que el de las *cuspoides.* Si a éstas las podemos imaginar como una estructura de tipo «canal»,



a la que se va dotando de pliegues cada vez más complejos [La parte superior de las figuras 4.12, 4.13. y 4.14], las *umbílicas* pueden imaginarse según la *umbrella de Whitney:* el canal queda unido a una línea trazada perpendicularmente al lecho del canal:



Si la curvatura es para todo el lecho o bien mayor o menor de 180[9], o bien menor en una parte y mayor en otra, estas deformaciones de la *umbílica* canónica toman el nombre de a) *hiperbólica,* b) *elíptica* y c) *parabólica* respectivamente. Por ejemplo:



A fin de visualizar la figura, debemos dar cortes, trazar secciones, proyectar puntos singulares, etc. de la variedad dada. Puede servir como ejemplo de la *umbílica hiperbólica* la superficie de la figura 4.12 I.

ii) Los *puntos críticos de la superficie de equilibrio, M,* vienen determinados por las derivadas parciales:

$$\partial/\partial x\ V_{(a,b,c;x,y)} = 2xy - 2ax + b = 0$$
$$\partial/\partial y\ V_{(a,b,c;x,y)} = x^2 + y^2 + 2ay + c = 0 \qquad (4.1)$$

iii) El conjunto de singularidades, ∑, o *matriz de estabilidad* se obtiene hallando las segundas derivadas y el determinante del hessia-no igualado a cero:

$$V_{ij} = 2 \begin{vmatrix} y - a & x \\ x & y + a \end{vmatrix} = 0$$

Encontramos así un punto cuádruple en el caso en que la matriz de estabilidad se anula. Por tanto, el potencial Ven el punto de coordenadas (0,0,0), esto es, $^{V}(0,0,0,x,y) = x^2y + 1/3\ y^3$, tiene un punto crítico cuádruple degenerado.'Los doble y triple puntos críticos degenerados se establecen hallando uno de los autovalores de la matriz de estabilidad. Cuando se anula el determinante de V:

$$\det\ V_{ij} = 4(y^2 - x^2 - a^2) = 0 \qquad (4.2)$$

se obtiene el conjunto *crítico,* que, en este caso, es la *hipérbola:* y^2

$- x^2 = a^2$.

Esto significa que siempre que un punto crítico se encuentre sobre la hipérbola es doble o triple degenerado [Fig. 4. 12 II]. Para hacer más intuitivos los cortes, estamos interesados en la representación paramétrica para las coordenadas *{a;x,y)* en el plano de control *(b,c):*

$-b = 2xy - 2ax$

$-c = x^2 + y^2 + 2a^2$ (4.3)

iv) Para trazar el *conjunto de bifurcación o separatriz,* podemos tratar de hallar las proyecciones en el espacio de control *(b,c).* Es suficiente determinar algunas secciones de *(b, c)* de la separatriz en distintos planos, v. gr., en a=+1, a=0, a=-1. Resolviendo la ecuación (4.3), podemos representarla como en la figura 4.12 III. Si unimos ahora estos tres planos por «apilamientos», se obtiene la figura global 4.12 IV.

v) Para determinar las *propiedades cualitativas* de la *u. parabólica,* investigamos las propiedades de funciones parametrizadas a lo largo de la línea a=+1 y *b-Q,* haciendo variar c. A lo largo de la línea, las ecuaciones del potencial y la superficie catástrofe que determinan los puntos críticos (4.3) son ahora (para: a=+1, *b=0):*

$2xy - 2x = 0$

$x^2 + y^2 + 2y + c = 0$ (4.4)

De (4.3) se sigue que los puntos críticos han de coordinarse, o bien con x=0, o bien con $y = +1$.

- Si lo hace con x=0, entonces $y = -1 + \sqrt{}\,1$ -c, por (4.4)

Esto significa que hay una parte real de puntos críticos para c <+1.

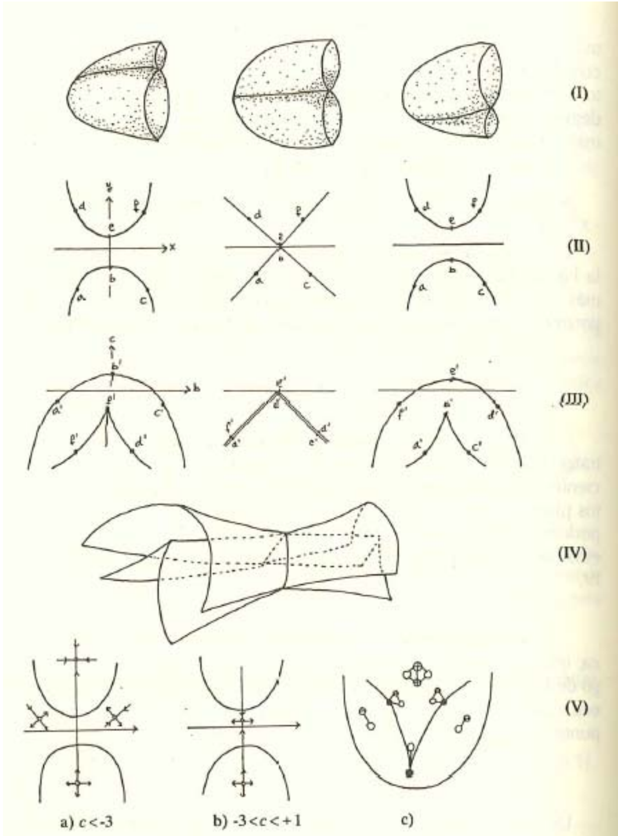


Fig 4.12 Catástrofe «Umbílica Hiperbólica»

- Si lo hace con y=+1, tenemos $x = \pm\sqrt{-(3+c)}$, según (4.4)

La parte real de los puntos críticos existe para c < -3. En el resto de los valores de c, i.e., c > 1, no hay puntos críticos.

Una vez que hemos localizado los puntos críticos, las propiedades de estabilidad (tipo Morse) pueden ser determinadas por mediación de la matriz de estabilidad.

a) En los puntos críticos: x=0 e $y = -1\pm\sqrt{1-c}$ la matriz es:

$$V_{ij} = 2\begin{vmatrix} y-1 & 0 \\ 0 & y+1 \end{vmatrix}$$

Hallamos sus autovalores y obtenemos: $\lambda_1 = 2(y-1)$ *y* $\lambda_2 = 2(y+1)$

Así, pues, los ejes *x* e y son las direcciones principales, con los autovalores en las direcciones principales xe *y,* igual a 2(y-1) y 2(y+1), respectivamente.

b) Para los puntos críticos y=+1, $x = \pm\sqrt{}\,-(3+c)$ la matriz de estabilidad es:

$$V_{ij} = 2\begin{vmatrix} 0 & \pm\sqrt{-(3+c)} \\ \pm\sqrt{-(3+c)} & 0 \end{vmatrix}$$

y sus autovalores: $\lambda_3 = 2(1 + \sqrt{1-(3+c)})$ y $\lambda_4 = 2(1 - \sqrt{1-(3+c)})$ Lo que interesa ahora es averiguar cómo cambian los signos de los autovalores al pasar por ciertos lugares. Por ejemplo, el autovalor λ4 se anula en el punto *(x,y)* = (0,1) cuando c = -3. Este tipo de lugares, *críticos* (4.1), cruzan la *superficie de equilibrio,* en donde esperamos que sucedan las cosas más interesantes. Si dibujamos las propiedades de estabilización, obtenemos los siguientes puntos atractores:

i) Si c > 1, no hay puntos críticos, según hemos indicado.

ii) Si -3 < c < +1, sólo hay dos puntos críticos: (0,= -1 + √1 -c) y (0,= -1- √l-c).

- En el punto (0,= -1 + √1 -c), los autovalores son:

• λ_1 = 2(y-1). Reemplazando y por su valor en función de c, tenemos:

2((-1 + √1 -c)-1) y, por tanto, *λ'1* = -4+2√1 -c.

• λ_2 = 2(y+1). Reemplazando y por su valor en función de c, tenemos:

2((-1+√l-c)+1) y, por tanto, *λ'2* = +2√1 -c. Como los autovalores son de distinto signo [Cap. 2], entonces en (0,= -1+√l-c) hay un punto silla.

- Haciendo el mismo tipo de cálculo para el punto (0,= -1 -Vi -c), se obtiene:

•$\lambda'_1 = -4-2\sqrt{}1-c$

• $\lambda'_2 = -2\sqrt{}1-c$.

Para el valor considerado de c, ambos autovalores son negativos y, en consecuencia, el punto (0,= $-1-\sqrt{}1-c$) es un máximo.

En resumen: en la región comprendida en $-3<c<+1$ existen, por consiguiente, un punto máximo y un punto silla [Fig. 4.12 Va].

iii) Si $c < -3$, hay cuatro puntos críticos: Repitiendo los cálculos, tenemos:

- En el punto (0,= $-1+\sqrt{}1-c$), los autovalores son:

•$\lambda'_1 = -4+2\sqrt{}1-c$

• $\lambda'_2 = +2\sqrt{}1-c$. Como ahora los valores de c son menores de -3, λ'1 ha de ser siempre positivo, y, como λ'2 también es positivo, nos encontramos con un mínimo.

- En el punto (0,= $-1\sqrt{}1-c$), los autovalores son: $\lambda''_1 = -4-2\sqrt{}1-c$ y $\lambda''_2 = -2\sqrt{}-c$. Los valores de c son menores de -3, por tanto, los dos autovalores son negativos, por lo que es un máximo.

- En el punto ($+\sqrt{}-(3+c)$,+1), los autovalores son:

•$\lambda_3 = 2(1+\sqrt{}1-(3+c))$

•$\lambda 4 = 2(1 - \sqrt{}1\text{-}(3+c))$, uno positivo y otro negativo, luego es una silla.

- En el punto $(-\sqrt{}\text{-}(3+c),+1)$, los autovalores son:

•$\lambda_3 = 2(1 + \sqrt{}1\text{-}(3+c))$

• $\lambda 4 = 2(1 - \sqrt{}1\text{-}(3+c))$, igualmente, una silla.

En esta región, para c<-3, hay, por consiguiente, un máximo, un mínimo y dos sillas [Fig. 4.12 Vb[.

La localización de los puntos singulares determina completamente las propiedades cualitativas de todas las funciones parametrizadas por tres o cuatro regiones abiertas como muestra la figura 4.12 Ve, en la que aparecen agrupados los puntos críticos en el espacio de control. Si c se aproxima a +1, los dos puntos críticos en *[x, y)* = $(0, -1\pm\sqrt{}1\text{-}c)$ se aproximan el uno al otro, haciéndose degenerado en (0, -1) cuando c=+1, y desaparece cuando o1. Los autovalores en la dirección *x* se acercan a -4, mientras que los autovalores en la dirección y disminuyen y se anulan en el límite c=+1. Esto es una *catástrofe,* porque el número de puntos críticos aislados cambia cuando c atraviesa +1 donde el det V_{ij}=0.

(D^*_4) UMBÍLICA ELÍPTICA

i) El potencial es: $V(_{a,b,c;x,y}) = x^2y\text{-}1/3\ y^3 + a(y^2 + x^2) + bx + cy$ Puede servir como ejemplo de la *umbílica elíptica* la variedad de la figura 4.13 I.

ii) Los *puntos críticos de la superficie de equilibrio, M,* vienen determinados por las derivadas parciales:

$\partial/\partial x\ V(_{a,b,c;x,y}) = 0 = 2xy + 2ax + b$

$\partial/\partial y$ V $(_{a,b,c;x,y}) = 0 = x^2 - y^2 + 2ay + c$ (4.5)

iii) El conjunto de singularidades, ∑, o *matriz de estabilidad,* se obtiene hallando las segundas derivadas y el determinante del hessia-no se anula:

Encontramos así un punto cuádruple en el caso en que la matriz de estabilidad se anula. Por tanto, el potencial Ven el punto de coordenadas (0,0,0), esto es, V(g0 QYU) = x^2y- 1/3 y^3, tiene un punto crítico cuádruple degenerado. Los'doble y triple puntos críticos degenerados se establecen hallando uno de los autovalores de la matriz de estabilidad. Cuando se anula, el determinante de V¡: = 0:

det *Vij.* = $4(a^2 - y^2 - x^2) = 0$ (4.6)

Así que el conjunto *crítico* es el *círculo:* $y^2 + x^2 - a^2$. Esto significa que siempre que un punto crítico se encuentre sobre el círculo es doble o triple degenerado [Fig. 4. 13 II]. Estamos interesados, como en el caso anterior, en la representación paramétrica para las coordenadas (*a;x,y)* en el plano de control *(b,c): -b= 2xy*+ 2ax

$-c = x^2 - y^2 + 2ay$ (4.7)

iv) Para hallar el *conjunto de bifurcación,* podemos tratar de hallar las

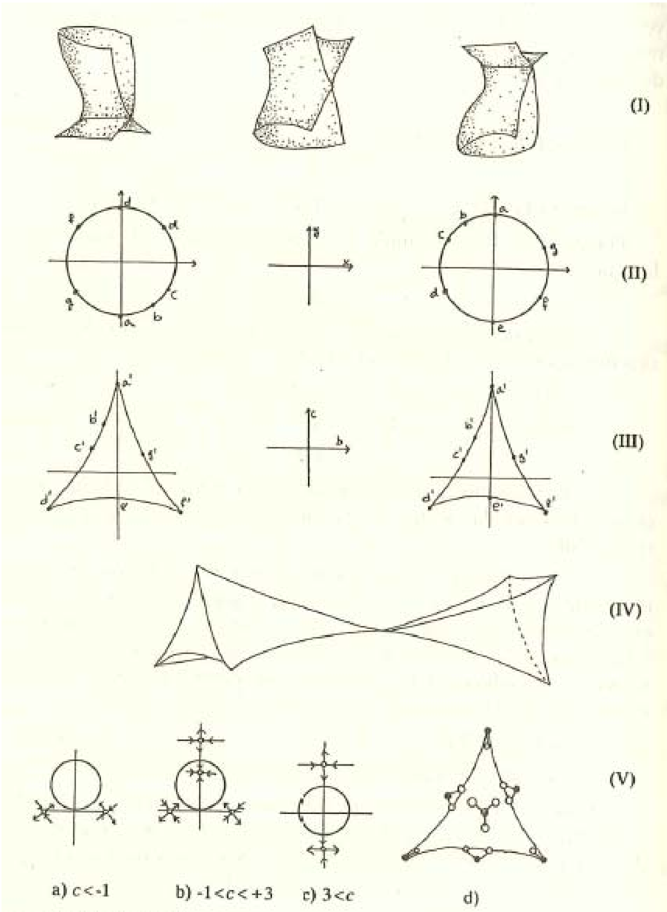


Fig 4.12 Catástrofe «Umbílica Elíptica»

proyecciones en el espacio de control *(b,c).* Es suficiente determinar algunas secciones de (b, c) de la separatriz en distintos planos, v. gr., en a=+1, a=0, a=-1. Resolviendo la ecuación (4.7), podemos representarla como en la figura 4.13 III. Si unimos ahora estos tres planos por «apilamientos» se obtiene la figura global 4.13 IV.

v) Para determinar las *propiedades cualitativas* de la umbílica elíptica, investigamos las propiedades de funciones parametrizadas a lo largo de la línea a= +1 y *b=Q,* haciendo variar c. A lo largo de la línea, las ecuaciones del potencial y la superficie catástrofe que determinan los puntos críticos (4.7) son ahora (para: a=+1, 6=0):

$2xy + 2x = 0$

$x^2-y^2 + 2y+c=0$ (4.8)

De (4.3) se sigue que los puntos críticos han de coordinarse, o bien con x=0, o bien con y=-1.

- Si lo hace con x=0, entonces por (4.8): $y = +1+\sqrt{1} +c$. Hay una parte real de puntos críticos para c<-1.

- Si lo hace con y=-1, tenemos según (4.8): $x = \pm\sqrt{(3+c)}$

La parte real de los puntos críticos existe para c<+3.

Una vez que hemos localizado los puntos críticos, las propiedades de estabilidad (tipo Morse) puede ser determinada por mediación de la matriz de estabilidad, que en los puntos críticos toma los valores: x=0 y $y= +1\pm\sqrt{1+c}$:

$$V_{ij} = 2\begin{vmatrix} y+1 & 0 \\ 0 & -y+1 \end{vmatrix}$$

Hallamos sus autovalores y obtenemos:

$\lambda 1 = 2(1 + y)$ y $\lambda_2 = 2(1 + y)$

Así pues, los ejes x e y son las direcciones principales, con los autovalores en las direcciones principales x e y, igual a 2(y-1) y 2(y+1), repectivamente.

Para los puntos críticos y=-1, $x = \pm\sqrt{(3-c)}$ la matriz de estabilidad es:

$$V_{ij} = 2\begin{vmatrix} 0 & \pm\sqrt{-(3+c)} \\ \pm\sqrt{-(3+c)} & 0 \end{vmatrix}$$

y sus autovalores son: λ_3 = 2(1 + Vi +(3-c)) y λ_4 = 2(1 - √1 +(3-c)) Lo que interesa ahora es averiguar cómo cambian los signos de los autovalores al pasar por ciertos lugares. Por ejemplo, el autovalor λ4= 0 en el punto (x,y) = (0,1) cuando *c* = -3. Este tipo de lugares, *críticos* (4.5), cruzan la *superficie de equilibrio,* en donde esperamos que sucedan cosas interesantes. Si dibujamos las propiedades de estabilización, obtenemos los siguientes puntos atractores:

i) Si c < -1, hay dos puntos críticos en (-1 ,+ √ (3-c)) y en (-1 ,- √ (3-c)). - En el punto (-1,+ √ (3-c)) los autovalores son:

•λ_3=2+2 √ l+(3-c)

•λ4 = 2- √ l+(3-c). Como un autovalor es positivo y el otro negativo, hay una silla.

- En el punto (-1 ,- √ (3-c)) los autovalores son:

•λ_3 =2+2 √ l+(3-c)

• λ_4 = 2- √ l+(3-c). Igualmente, una silla [Fig. 4.13 Va].

ii) Si los valores de c se encuentran en -3 < c < +1, en el interior del triángulo, entonces hay cuatro puntos críticos: (0,+1+ √ l+c) y (0,+1- √ l+c); (-1,+ √ (3-c)) y (-1,- √ (3-c)). Utilizando los cálculos establecidos, Le., en términos de c, tenemos:

- En el punto (0,+1 + √ l +c) los autovalores son:

• $\lambda_1 = 4+2\sqrt{}1+c$

• $\lambda_2 = -2\sqrt{}1+c$, así que, como c se encuentra entre -1 y 3, *λ'1 será* positivo y λ'2 negativo, y estamos ante un punto silla.

- En el punto (0,+1 √ l+c) los autovalores son:

•$\lambda'_1 = 4-2\sqrt{}1+c$

• $\lambda'_2 = +2\sqrt{}1+C$, tanto *λ'1 como λ'2* son positivos, luego hay un mínimo.

- En los puntos (-1 ,+ √ (3-c)) y (-1,- √ (3-c)) hay, como en el caso anterior, dos sillas. Así que en la región comprendida entre -3 < c < +1 tenemos tres sillas, y un máximo para *a<0* (o un mínimo para a>0) [Fig. 4.13 Vb].

iii) Si c > + 3, las dos sillas y el mínimo local se combinan para formar una silla simple a lo largo de los ejes x=0 e y<-1 y otro punto silla a lo largo de x=0 e y>1 [Fig. 4.13 Ve].

La localización de los puntos singulares determina completamente las propiedades cualitativas de todas las funciones parametrizadas por tres o cuatro regiones abiertas, como muestra la figura. 4.13 Vd. En el interior de las regiones triangulares las funciones tienen tres puntos silla y un mínimo local si a>0 o un máximo local si a<0.

(D_5) UMBÍLICA PARABÓLICA

(i) El potencial es de la forma:

^{V}(a b c d x y) $^{=}$ $x^2 Y + y^4 + cx^2 + dy^2$ - aplicación - *by*

(ii) La variedad catástrofe:

$$2xy + 2xc + a$$

$$x^2 + 4y^3 + b$$

(iii) El conjunto de singularidades, E:

$$\begin{vmatrix} 2y + 2v & 2x \\ 2x & 12x^2+2d \end{vmatrix}$$

$$\Delta = (y+c)\,(6y^2 + t) - x^2$$

Dada la complejidad de la umbílica parabólica, sólo damos -a título de ilustración- un esquema visual de cómo están conectadas las catástrofes inferiores en ella.

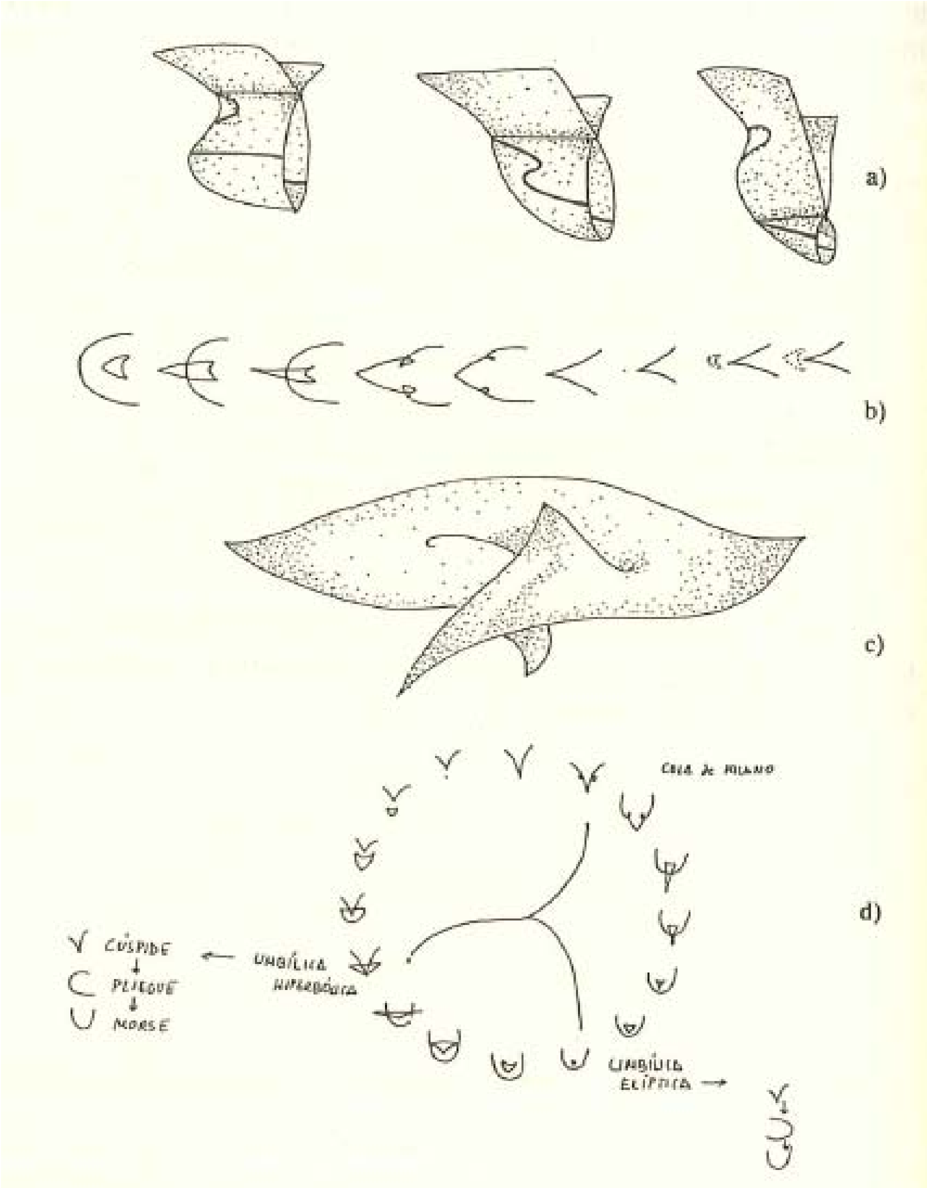
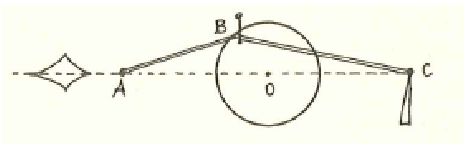


Fig. 4.14 Catástrofe «Umbílica Parabólica»

EJERCICIOS

Como toda regla tiene su excepción, algunos ejercicios de este capítulo serán algo más formalistas. Pueden entenderse como un paso hacia el manejo del formalismo topológico-catastrofista.

1) Quizá lo más interesante del cambio conceptual que comentamos sea el cambio en los modelos científicos. Si, como decía Rutherford, sólo se puede comprender aquello *que se puede construir como un modelo mecánico, compréndase la TC construyendo también un artilugio mecánico. Como ejercicio se propone al lector que construya su propia* máquina de catástrofes. *Para ello recórtese un disco de cartón cuyo diámetro se tomará como patrón unidad. En un punto cercano al disco se coloca un pivote que puede ser simplemente un alfiler, sobre el que se entrelazan dos gomas elásticas de longitud unidad. El extremo de una de ellas se lleva a un punto fijo C y el extremo de la otra* A se *deja libre. Se mueve lentamente la goma durante un tiempo t por el extremo* A; *el disco sobre el que se ejerce la fuerza responde también mediante un cambio lento hasta que* -en algunas ocasiones- *salta repentinamente. Lo curioso de estos saltos es que se producen a lo largo de una línea que forma el perímetro de un rombo curvilíneo, es decir, de dos cúspides unidas por los extremos.*



2) Las funciones f *y* g *son equivalentes. Hágase el dibujo mostrándolo. A continuación, demuéstrese su equivalencia mediante un cambio de coordenadas:*

$$u = x \qquad\qquad m = z-w-(z+w)^2$$

$$f: \qquad\qquad f:$$

$$v = y^2 \qquad\qquad n = 2(z-w) + (z+w)^2$$

3) Cuestión de tanteo: Buscar los valores de los parámetros de las siguientes ecuaciones para obtener un mínimo, dos mínimos, etc.

$$X^3 + ax$$

$$x^4 + ax^2 + bx$$

$$x^5 + ax^3 + cx^2 + cx$$

$$x^6 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx$$

4) *la familia de funciones:* $W_{(a,x)} = 1/4\ x^4 + 1/2\ ax^2$. Hallar los puntos críticos en las *coordenadas* (a,x) y hacer el dibujo *pertinente. La figura obtenida es la representación habitual de la bifurcación: sin duda puede ser -para ciertos propósitos- una descripción de lo que sucede. Perturbemos un poco la familia de funciones con el término* «∈x»: $W(_{a,X}) = 1/4\ x^4 + 1/2\ ax^2 + ex$. *Hallar los puntos críticos en las mismas coordenadas (a,x). ¿Qué diferencia encuentra entre ambas figuras? Dibujar una figura que ponga en contacto ambas representaciones y explicarla en términos de Estabilidad Estructural.*

5) Hallar el hessiano de las siguientes funciones y dibujar la superficie asociada:

$$f(x,y) = -x^2 - y^2;\ f(x,y) = x^2 + y^2;\ f(x,y) = x^2 - y^2$$

$$f(x,y) = x^3 - 3xy^2;\ f(x,y) = x^2y^2;\ f(x,y) = x$$

6) Dibujar los gérmenes de las umbílicas (ayudados, por ejemplo, por un programa de ordenador como DERIVE):

$$z = x^2y + y^3;$$

$$z=x^2y- y^3;$$

$$z= x^2y + y^4.$$

7) Dado el sistema:

$$a = x^4 - bx^2 -cx$$

$$b = b,$$

Hallar sus proyecciones en los planos (x,b) y (a,b) para distintos valores de c.

Lo mismo para el sistema:

a = x^5 - fax-^{3} -ex^2 -dx

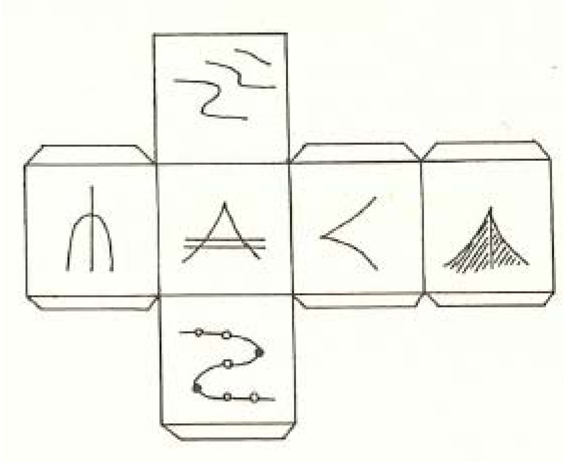
b = b,

Hallar sus proyecciones en los planos (x,b) y (a,b) para c = 0 y distintos valores de d.

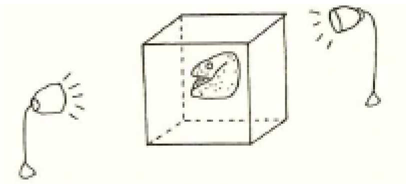
8) De entre las mencionadas en este capítulo, ¿qué par de palabras habrían de ocupar los puntos suspensivos del siguiente comentario?

"Esto indica que la situación prácticamente óptima para conocer -es decir, para absorber el mayor número y la mejor calidad de elementos objetivos-, es intermediaria entre la pura contemplación y el urgente interés. Hace falta que algún interés vital no demasiado premioso y angosto organice nuestra contemplación, la confine, limite y articule, poniendo en ella una perspectiva de atención. Con respecto al campo puede asegurarse que [......] es *el cazador, el cazador de afición, quien suele conocer mejor la comarca, quien logra contacto más fértil con más lados o facetas del multiforme terruño. ORTEGA y GASSETJ.:* O.C., *t. 3, p. 406.*

9) El lector podrá ejercitar su habilidades pictóricas y espaciales construyendo un cubo de cada una de las cuspoides. *Dibujamos un modelo que pueda servir de inspiración.*



Con un adecuado juego de luces, si se estira y contrae la superficie de catástrofe o bien se deja rodar sobre ella un objeto -canica, dado...-pueden conseguirse efectos sorprendentes:



CAPITULO 5. TEORÍA DE LAS CATÁSTROFES Y LINGÜÍSTICA

Tanto el presente capítulo como el siguiente constituyen el corazón de este libro. La aplicación de la TC a la Lingüística es, seguramente, uno de los hechos más sorprendentes de la investigación en ciencias humanas de las dos últimas décadas. Y si bien es cierto -como señala Chenciner- que en lo concerniente al método está muy lejos de la bella unidad que presentan algunas teorías más formalizadas, no lo es menos que la belleza de la topología necesita ser descubierta a través de una visión diferente de la realidad. Thom señala explícitamente que es tentador representarse el *universo semántico* como una morfología cuyo substrato sea un espacio euclídeo de *n* dimensiones. Si se adopta el punto de vista materialista, el espacio de activación de las neuronas identifica un estado mental con un estado cerebral. Supongamos que nuestro cerebro es un cubo l^n, o espacio de excitación neuronal en continua evolución y de dimensión enorme, que se formaliza mediante un campo de vectores *X* los cuales varían lentamente en el tiempo. Una «¡dea» se describe como un atractor estructu-ralmente estable de *X,* que puede ser destruido por *bifurcación* y dar lugar a un nuevo atractor en un proceso que se repetirá indefinidamente. La significación de una «¡dea» procederá, pues, de la topología interna del atractor, así como de su posición en el cubo l^n. La actividad del lenguaje exige la proyección de esta morfología de *n* dimensiones en un espacio de dimensión uno: el *tiempo.* Las estructuras sintácticas suponen que esa proyección de R^n en R se realiza por intermedio de un espacio de dimensión cuatro (tres dimensiones del *espacio* y una del *tiempo):* $R^n \to R^4 \longrightarrow R^1$. La estructura sintáctica será, pues, la proyección unidimensional de ese espacio semántico *multidl*-mensional. La tesis especulativa de Thom-Petitot supone que la TC posee la capacidad de un modelo semántico, según el siguiente paralelismo:

Topologías de los atractores .....Valor del significado
Morfologías externas...........Valor de la sintaxis
Proceso interno, *X*.............Semántica
Proceso externo, *W*............Sintaxis
Espacio externo ....Conceptual, puramente abstracto

5.1. LA SIGNIFICACIÓN. «Visión» topológica

¿Cómo dar cuenta de la significación? El siglo XX ha desarrollado dos teorías claramente delimitadas por las fuentes de inspiración a que recurren y, curiosamente, atribuidas a un mismo autor: el Wittgenstein (1889-1951) del *Tractatus,* que explora la tesis del lenguaje formal, y el Wittgenstein de las *Investigaciones filosóficas,* que explora la tesis del lenguaje ordinario. Thom rechaza explícitamente ambas vías: por una parte, la de los *lenguajes étnicos,* insuficientes para explicar la significación por la facilidad que tienen en confundir los planos del lenguaje y el metalenguaje, dando lugar a toda clase de *circularidades, tautologías* y *verbalismos;* por otra, la de la *Lógica algorítmica,* pues no hay procedimientos canónicos que permitan asociar a la estructura «profunda» de la Semántica la estructura «superficial» de la Sintaxis. Thom denuncia la limitación de los sistemas formales y ya conocemos la razón gnoseológica [cap. 3]. Históricamente el formalismo hilbertia-no se hizo independiente de la teoría de la significación, por lo que se necesitó recuperarla de alguna forma; la teoría de Modelos de Tarski (1901-1983) fue construida, precisamente, para solventar esta carencia semántica, pero no es suficiente para dar cuenta del Significado. En este contexto Thom critica -por partida triple- el modelo generativo-transformacional de Chomsky, exponente máximo del lingüista formalista:

1) No hay una frontera estricta entre expresiones gramaticales y expresiones que no lo sean, sino una gradación continua entre agra-maticalidad y aceptabilidad semánticas. Thom se atreve a reintroducir el *continuo que* los modelos *discretos* formalistas habían expulsado de la investigación. El problema del cambio, de la diacronía, exige dotar al sustrato de propiedades dinámicas, lo que implica un compromiso con entidades de la ontología general (Thom mismo cita el «éter» de Maxwell, de difícil asunción en la ontología regional o especial [1]), a la vez que con una nueva herramienta conceptual que lo explicite: la Teoría de la Estabilidad Estructural y la Morfogénesis, síntesis de la Topología Matemática y de la Dinámica Física [Cap. 4].

2) El modelo formal es inadecuado para su realización. Como ya se ha estudiado [cap. 3], los sistemas formales poseen su propia semántica, aunque ésta se

muestra impotente -por su carácter autoformante-, para explicar las estructuras de más de una dimensión.

3) Hay que dar cuenta no tanto de la generatividad de la sintaxis como de la drástica limitación de las teóricamente infinitas posibilidades de la competencia lingüística. Es la *autolimitación* semántica de las capacidades sintáctico-generativas lo que pide explicación. O, en otras palabras, es el fenómeno de la *fatiga* del lenguaje lo problemático: nuestras oraciones con sentido pueden alcanzar diez, veinte, ¿cincuenta?, ¿cien palabras? Pero es absurdo pensar en un libro, por ejemplo, que no tenga puntos, comas, etc. Un libro queda dividido, precisamente, en frases de diez, doce, veinte palabras. Es cierto que hay novelas escritas sin signos de puntuación, pero no dejan de ser experimentos literarios que, por otra parte, exigen del lector el esfuerzo de «trocear» el texto.

El camino que sigue Thom es el *topológico,* alejado por igual del formalismo sintáctico y del semanticismo intuitivo. Consideremos un caso concreto: ¿Cuál es la significación de los *verbos!* Si descartamos las definiciones clásicas -intuitivas o formalistas- para dar paso a la «visión» topológica, podemos rehacer la pregunta de este modo: Topológicamente, ¿qué es un verbo? Un verbo es un conjunto *cerrado,* un contorno trazado sobre el espacio- sustrato del mundo semántico, que es un espacio conceptual y abstracto. Concentrarse en el verbo es concentrarse en un cerrado, un concepto matemático que se refiere a una entidad morfológica. Así se pone en marcha, con un fuerte control matemático, el «giro morfológico» *{morphological turrí}*[2] de este fin de siglo, frente al «giro lingüístico» *(linguistic turn)* de sus inicios.

Sea el dominio *U* espacio-tiempo, sede del proceso considerado. El punto u de *U* es *regular* si el proceso tiene la misma apariencia cualitativa en todo punto *u'* de la vecindad de *u.* Los puntos regulares forman un *abierto* y se reparten en un cierto número de componentes conexos; los puntos singulares, que forman el complemento *K* de *U,* constituye el *conjunto catástrofe* del proceso [Cf. cap. 4]. Esta estructura topológica puede ser interpretada en el dominio lingüístico de la siguiente manera:

- Se supone que el «discurso» -concepto que hemos de entender en su sentido fuerte: que incluye la referencia al *mundo*- describe siempre un proceso espacio-temporal. El lenguaje expresa fenómenos ambientales que -desde la hipótesis de Thom- pueden comprenderse como «catástrofes elementales», definidas por un conflicto de regímenes en el espacio-tiempo R^4.

- El número de los componentes conexos que pueden ser individualizados en el conjunto continuo de los puntos regulares son llamados en lingüística *actantes* o *actuantes.* Cada dominio estable, se dirá, es un *actuante.*

- El tipo topológico del dominio de un actuante es un entorno o bola topológica B^3 [Cap. 2], El proceso se cumple porque a lo largo del tiempo ciertos actuantes *interactúan* localmente. Entonces sus dominios respectivos entran en contacto según un conjunto de puntos catastróficos que se suponen conexos [Fig. 5.1].

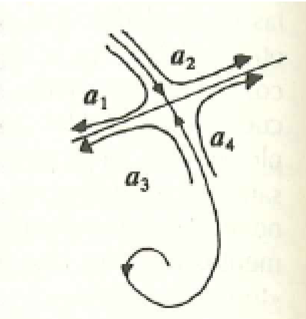


Fig. 5.1 Actuantes

- Si el proceso espacio-temporal se describe por una *proposición atómica, p* [Cap. 1], el verbo corresponde a la estructura de un *atractor,* y el grafo de interacción del proceso da lugar a diferentes *tipos topológicos* -según el número y la disposición de los atractores-, que determinan la estructura sintáctica de la frase que describe la acción del verbo, y esto no es algo caótico o indeterminado. ¿Cuáles son esos *tipos?*. Por la hipótesis de Thom, serán ±16, de acuerdo con la clasificación de las singularidades [Recuérdese el capítulo anterior, que ofrece un esbozo del formalismo de la TC]. El tipo topológico de iteración es el que determina la estructura sintáctica de la frase.

- La *palabra* se considerará como un *campo* de la dinámica neuronal. (No deja de ser curioso que el concepto de *campo* sólo sea controvertido cuando se aplica en biología o en lingüística; las epistemologías de corte reduccionista admiten y utilizan el concepto en mecánica clásica -*campos* gravitacionales-, en electromagnetismo -*campos* eléctrico y magnético-, en física de altas energías -*campos* cuánticos-, incluso en Etología -*campos* perceptivos-, ¿Por qué había de negarse la posibilidad de este concepto en Biología o en Lingüística?) A los islotes que quedan separados por zonas indeterminadas e/o inestables, los denomina Thom *creodas o campos morfoge*néticos. Por consiguiente, en los procesos naturales trataremos de aislar las partes estructuralmente estables, que son las *creodas* de ese proceso. Cada una de ellas contiene «creodas elementales» -las catástrofes-, las cuales deben ser analizadas para comprender su organización en una forma global estable por la acción de un centro organizador. Después habrá que estudiar la organización de las creodas entre sí; las más estables serán las que poseen mayor significación, etc. La tesis de Thom es, sin duda, sorprendente:

"El lenguaje humano es un sistema descrito por un modelo semántico de dimensión uno (el tiempo) y las creodas son las palabras".

Si las palabras son consideradas como *creodas* o *campos morfogenéticos,* la significación de una creoda vendrá dada por la estructura topológica de las catástrofes que contenga y que limitan su dominio. Ahora bien, como cada catástrofe elemental viene definida por sus singularidades, son esos tipos cualitativos los que las determinan en última instancia. Como Thom pone el origen de las estructuras sintácticas en su configuración espacial, puede correlacionar la herramienta matemática, que investiga las singularidades espacio-temporales, con los distintos casos sintácticos; por consiguiente, el número de estructuras sintácticas estará sometido a los mismos constreñimientos que el número de singularidades espaciales. Esta teoría del origen espacial de las estructuras sintácticas explica numerosos hechos, entre los que, quizá, son fundamentales: i) que una oración elemental no contenga más de *cuatro* actuantes; esto se debe a que la TC se identifica con la formulación clásica de Gibbs para el equilibrio termodinámico. La Regla de las Fases de Gibbs limita a cuatro el número de regímenes estables que pueden estar en equilibrio en un punto del espacio euclídeo de tres dimensiones, ii) En el caso de las lenguas con declinación, la teoría da cuenta de la mayor parte de los casos: el nominativo para el sujeto, el acusativo para el objeto, el dativo para el desiderativo, el ablativo (o instrumental) para los verbos que tienen la morfología de la escisión (o de reunión o compañía).

La hipótesis de Thom en lingüística viene a decir que la TC describe todos los tipos *morfológicos* en las condiciones de los potenciales de gradiente, de dimensión interna de una o dos variables y de codimensión igual o inferior a cuatro, teniendo en cuenta la dirección del eje del tiempo en el despliegue universal. Estas morfologías están vinculadas a procesos físicos naturales (si seguimos la convención de Maxwell) o a procesos biológicos (si seguimos la convención del *perfecto retardo)* [Cap. 4], Procesos que el hombre es capaz de «poner en palabras». Esta acción semántica *dogos)* está sometida a las mismas restricciones que los tipos morfológicos, de donde el semantismo verbal de base queda sometido a la teoría de las singularidades, a sus rup-turas, sus transiciones, sus «catástrofes» [Véase *infra,* ontología de saliencias y pregnancias].

Esquematizaremos esta propuesta semántica con el mito de San Jorge y el dragón, que ha estudiado Petitot. Sus tres personajes clásicos *(actuantes)* -el sujeto o héroe, S, el antisujeto o dragón, $\bar{S}$, y el objeto o princesa, O-componen una estructura de transformaciones típicas: $\bar{S}$ -> O -> S. Si trabajamos sobre el espacio de control de la catástrofe mariposa» [Fig. 5.1], podremos representar las establecerse entre estos tres actuantes:

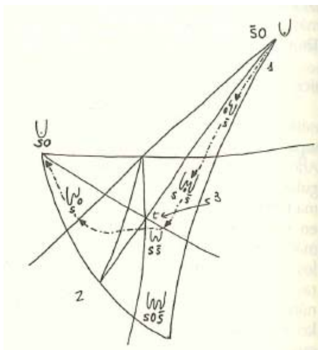


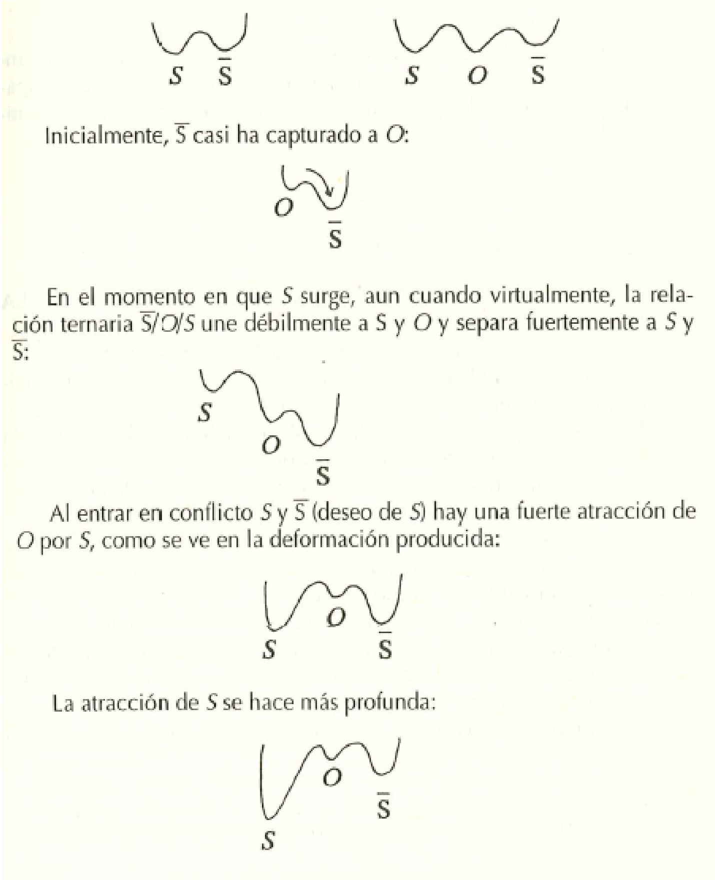
Fig. 5.2 El mito de San Jorge y el dragón

En el punto 1) el dragón captura a la princesa. En el punto 2), y por efecto exclusivo de la estructura, se establece un deseo (una realidad *virtual),* por el que el sujeto quisiera arrebatar la princesa al dragón. El punto 3) es un punto triple (f) que organiza el conflicto: $\overline{S}$/O/S. Alrededor de este punto f, tiene lugar el combate $\overline{S}$/S, al atravesar la singularidad donde la cúspide *S/O* se escinde del estrato de conflicto O/S. Sin embargo, entre $\overline{S}$*/S* no puede haber centro organizador; el sujeto y el antisujeto sólo pueden transferir su posición: o domina S o domina S.

La propia estructura permite, por lo tanto, una *polarización moral,* valorativa o axiológica, al considerar que *S/O* tiene una connotación positiva y $\overline{S}$/O, una connotación negativa.

Este análisis permite, además, distinguir dos tipos de esquematiza-ción: *sincrónica* (trazo continuo de la figura 5.2), correspondiente a la copresencia de las secciones; *diacrónica* (trazo discontinuo), correspondiente a los *caminos* del espacio externo que se recorren. Esto es muy destacable, pues implica que lo *paradigmático* (el «sentido» que poseen los *arquetipos* o *logoi)* precede a lo *sintagmático.* En este ejemplo, podemos comprobar la característica del estructuralismo: se puede definir la estructura (el «escenario») en que tienen lugar las relaciones entre *actuantes.* Las relaciones son, por consiguiente, *efectos de estructura.* El conflicto $\overline{S}$/S y la transferencia de $\overline{S}$/O a *S/O* exige pasar por los *caminos* del interior del espacio de control, que pueden ser muy ricos y variados.

El conflicto $\overline{S}$/S se expresa por una catástrofe de conflicto en el punto t y la relación ternaria $\overline{S}$/O/S, por una catástrofe de bifurcación:



S $\bar{S}$ S O $\bar{S}$

Inicialmente, $\bar{S}$ casi ha capturado a O:

O $\bar{S}$

En el momento en que S surge, aun cuando virtualmente, la relación ternaria $\bar{S}/O/S$ une débilmente a S y O y separa fuertemente a S y $\bar{S}$:

S O $\bar{S}$

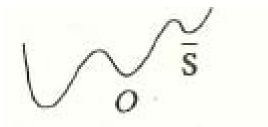
Al entrar en conflicto S y $\bar{S}$ (deseo de S) hay una fuerte atracción de O por S, como se ve en la deformación producida:

S O $\bar{S}$

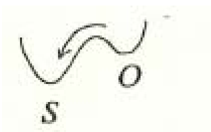
La atracción de S se hace más profunda:

O $\bar{S}$ S

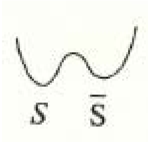
Y queda invertida la Posición de dominio del antisujeto. Ahora Ia, relación ternaria: SO$\bar{S}$ une fuertemente a S y O y débilmente a S y $\bar{S}$:



El héroe atrae a la princesa, que huye del dragón.



Así suelen acabar los cuentos, en una situación estable. Pero también son posibles otros casos. Por ejemplo, la princesa puede desaparecer tragada por el dragón y quedar el enfrentamiento sujeto y antisujeto, etc.



5.2. EL LENGUAJE «VISTO» DESDE LA TEORÍA DE LA MORFOGÉNESIS

La teoría de la morfogénesis en Lingüística recurre a algunos elementos (en el sentido kantiano) que son las condiciones de su posibilidad misma: 1) Al fenómeno de la resonancia entre el sistema neuronal y el lingüístico, que interactúan hasta alcanzar la estabilidad. 2) A la escala corpórea y operatoria de ciertos organismos como mediadores entre la teoría matemática de la TC y la Lingüística. 3) A la correspondencia entre el desarrollo morfológico y el desglose lingüístico.

1) **La Resonancia:** La aplicación de la TC a la Lingüística exige una explicación epistemológica. Para justificar este modelo, hemos de defender un principio de isomorfía entre el sistema cerebral con sus procesos psíquicos y el medio ambiente. El conocimiento es, esencialmente, *simulación* interna del mundo exterior en el sentido aristotélico de la *adaequatio rei et intellectus.* Los materiales plásticos neuronales y corpóreos, en general, son aptos para recibir y conservar esa simulación de las formas, tal como lo hace la memoria humana. La afinidad entre los seres vivos y los cuerpos sólidos con los que tienen que relacionarse, tanto para cooperar con ellos como para defenderse, se muestra en hechos tan sorprendentes y curiosos como, por ejemplo, que la Mecánica de los Sólidos sea mucho mejor conocida que la Mecánica de los Fluidos, o que el hombre que ha dominado (domesticado) relativamente pronto a las fieras y los animales salvajes, se vea totalmente desbordado por las bacterias y los virus, fuera del alcance del sentido común y de las técnicas a escala corpórea

Entre las actividades psíquicas del hombre hay una primordial: organizar los datos de los sentidos en una representación del espacio-ambiente que contiene el cuerpo como dominio privilegiado. Los mecanismos cerebrales *simulan* entonces las leyes reales de la mecánica. Este tesis puede ejemplificarse de muchas maneras con algunas anécdotas curiosas. Las abejas por ejemplo parecen ser excelentes geómetras: *"La abeja proyecta el recorrido del sol sobre la superficie horizontal. Para este animal, la altura* *del sol no tiene la menor importancia, sólo se interesa por el ángulo solar en la horizontal, es decir, el denominado ángulo acimutal..."* . Para los humanos, como señala Vollmer, la determinación de la distancia a que se encuentra un objeto está en relación con la convergencia de los ejes oculares según la fórmula trigonométrica: d = b/2 *cotang* a. Nuestro aparato perceptivo realiza o simula operaciones matemáticas elementales en la reconstrucción del mundo exterior [Fig. 5.3].

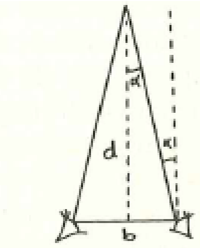


Fig. 5.3 Distancia

Hasta hace muy poco, era un lugar común en lingüística asociar la morfología descriptible -grafía, sonido...- al «significante» y considerarlo, por tanto, objetivable, y, además, suponer que sólo se podía acceder al «significado» por medio de la introspección, de fuerte componente subjetivo. Esta tendencia a hipostasiar las estructuras humanas e independizarlas de la naturaleza tiene, sin duda, una tradición filosófica muy respetable, que va desde el agustinismo -a través de Descartes y Port-Royal- hasta Chomsky. La apuesta de Thom es muy enérgica: hay que *"crear una teoría de la significación* -dirá-, *cuya naturaleza sea tal, que el acto mismo de conocer sea una consecuencia de la teoría".* Así que siempre que nos topemos con un símbolo que se supone significativo, hemos de saber por qué lo es y a qué factores formales hemos de atribuírselo. Ciertamente, se niega el aspecto subjetivo de la significación y se propone un acceso objetivo, de naturaleza topológica y dinámica. ¿Cómo imaginar siquiera esta teoría? Mediante el concepto de *Resonancia.* Es muy conocido el caso del acoplamiento de los diapasones: dos diapasones idénticos que se ponen a vibrar independientemente, al irse acercando -por transferencia de sus energías cinéticas- comienzan a vibrar de manera sincrónica. Leonardo da Vinci supo sacar consecuencias epistemológicas del fenómeno de la resonancia, que él conocía y había estudiado: *"Cuando el artista representa algún asunto espantoso, doloroso o cínico, la impresión que reciba el espectador debe llevarle a hacer tales gestos que parezca participar él mismo en las* *acciones representadas; si no logra este resultado, entonces debes saber, artista, que todos tus esfuerzos fueron vanos".*

La generalización de este concepto nos aleja del mecanicismo y del reduccionismo típicos de la ciencia, que supone que todos los niveles de realidad se explican a partir de sus componentes. Así el «jaguar» se explica desde el «quark», según expresión que se convertirá de acá a poco tiempo en refrán popular. Pero -se pregunta Thom-, ¿cómo ese conglomerado de electrones, protones, «quarks»... con propiedades mal definidas, pueden organizar a escala humana un mundo relativamente estable y coherente, tan lejos del caos cuántico que nos sugiere el mecanicismo reduccionista? En vez de buscar la estabilidad de una forma en átomos y fuerzas, se ha de buscar en estructuras algebraico-topológicas dotadas de estabilidad estructural, en los *logoi,* sea así dicho en honor de Heráclito.

Pues bien, el lenguaje puede entenderse como un sistema que entra en resonancia con el cerebro humano, de tal manera que a una frase (regida por un verbo) corresponde un *atractor* de la dinámica cerebral tal, que a la audición de una orden, por ejemplo, la dinámica cerebral sufre una excitación que tiende a estabilizarse rápidamente al ser capturada por el atractor. Puede el lector imaginar una situación corriente que ¡lustre este pensamiento: cuando no escucha bien las palabras que se le dirigen, el niño se pone muy nervioso (inestabilidad máxima), hasta que comprende lo que se le dice (estabilización). ¿Por qué? Porque -en nuestros términos- una vez comprendida la frase o el discurso, se *estabiliza* su sentido, su significado. En gran medida, comprender es inmunizarse contra los estímulos exteriores, es controlar, identificar el medio.

A veces, sin embargo, no es necesario comprender el texto. Se escucha como una música, como una canción en un idioma desconocido. La atención, entonces, recae en la propia escala fonética: sonoridad, musicalidad, etc. (Ya se ha dado [cap. 3] la razón gnoseológica de este fenómeno). Cuando el sistema unidimensional se trata en sí mismo, y no como medio de proyección de morfologías más complejas, se estructura al modo de las operadores autoformantes o cuasi-autoformantes. Esto en literatura se comprende bien en dos casos: i) el *Ripio,* en el que son más importantes la musicalidad, el aspecto puramente sensorial o fonético de las frases que el sentido. Lo que se dice es puro pretexto, ¡i) Por contra, cuando el texto es muy oscuro, cuasi a-significativo, como en ciertos poemas herméticos (Góngora, Ungaretti...), por sucesivas *repeticiones* lo vamos haciendo cada vez más cercano a contextos familiares, significativos. La «ambigüedad» del lenguaje, tan importante en las teorías de estructura superficial / profunda, no es más que un fenómeno accidental, según Thom.

La teoría de la resonancia nos permite, entonces, entender la significación como la posibilidad de adoptar, bajo la influencia de perturbaciones externas, regímenes correctores que anulan el efecto de esas perturbaciones.

2) **El supuesto Biologicista**: La *resonancia* nos conduce a una teoría del significado mucho más general, que afecta no sólo a los hombres, sino a todos los organismos vivos que se encuentran en un medio ambiente *(environnement).*

La posición tomada por el racionalismo de la preguerra (materialista: Kosic; espiritualista: Mounin) defendía una doble tesis sobre el lenguaje humano: su independencia de los lenguajes animales y la arbitrariedad del signo lingüístico. Es decir, que su estructura sería ajena a la época evolutiva en que hubiera cristalizado (autonomía de lenguaje) y arbitraria en relación a las cosas del mundo. La Etología, que ha cristalizado tras la Segunda Guerra Mundial (Lorenz, Tinbergen), introduce diferencias esenciales en la consideración del lenguaje humano: éste no sería más que un episodio de los lenguajes de comunicación animal y no sólo no sería independiente del mundo, sino que estaría vinculado al medio ambiente. Thom se alinea con esta última posición. Su argumento responde a la pregunta: ¿Es el *sentido* una cuestión puramente *lingüística!* La respuesta ha de ser negativa. El Sentido desborda la actividad lingüística, porque en el mundo hay «formas» que poseen «sentido» para organismos que no poseen lenguaje. Pero defender la tesis de la comunicación animal no tiene por qué conducir a un reduccionismo biológico, puesto que los organismos vivos reaccionan ante esas «morfologías» sin que sea obligatorio que la respuesta esté vinculada estrictamente a las formas, a los contornos, a las siluetas...; puede ser un sonido, un color, un aroma... Lo que sí parece necesario, sin embargo, es que haya una cierta *estabilidad interna.* Es más, el sentido de esa forma estará ligado a su inestabilidad:

precisamente la TC estudia la estabilización de gérmenes inestables. Pues bien, estos fenómenos son estudiados por Thom bajo el concepto de *pregnancia.*

La ontología de saliencias / pregnancias

Una *saliencia* es, en la ontología de Thom, toda forma experimentada que se separa netamente del fondo continuo del cual ésta destaca. Algunas de entre estas saliencias provocan una reacción de gran amplitud en el sujeto: liberación de hormonas, excitación emotiva, atracción o repulsión, etc. A estas formas Thom las llama *pregnantes* (la psicología de la Gestalt hablaba de *Prágnanz)* y *pregnancia* a ese carácter específico.

Los animales están fascinados por formas del mundo externo, que, para ellos, tienen una gran capacidad de ser *pregnantes.* Ciertamente estas formas son un subconjunto de otras formas más numerosas, las *saliencias* que se destacan en el espacio externo produciendo, al menos, un interés momentáneo. Pero no todas estas saliencias tienen el mismo interés para el animal; sólo algunas de ellas, las grandes estructuras de regulación que afectan al comportamiento de todo individuo -hambre, apresamiento, sexualidad, huida, etc.-, se convierten en pregnantes[16]. Estas formas pregnantes se propagan a través de una saliencia (sonido, olor...) que puede entenderse como una fisura de la realidad por donde se filtra la pregnancia. Tales saliencias quedan *catectizadas m* por las pregnancias, cuyos modos de propagación son los bien conocidos y estudiados de la metáfora y la metonimia [Fig.5.4].

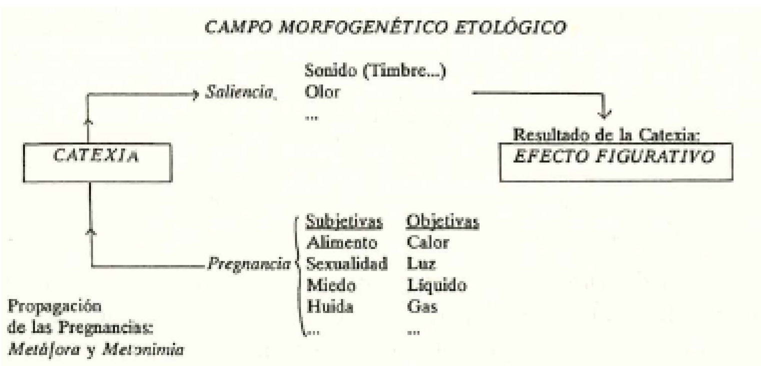


Fig. 5.4 Ontología Saliencia / Pregnancia

El criterio que propone Thom es la capacidad de identificación del sujeto con la «morfología», debido a la *resonancia:* las pregnancias quedan estabilizadas por acoplamiento de las saliencias. Se podría decir que el análisis morfológico de los objetos consiste en atribuir algo así como un cuerpo, es decir, un efecto de frontera que separa la «figura», un contorno, del «fondo», un continuo, por lo que no es descabellado hablar de una cierta *intencionalidad* del objeto más que del sujeto. La identificación del sujeto con una forma exterior es el aspecto fundamental de la «significación». Es en esa situación cuando se produce el «juicio» conceptual (en el sentido escolástico de la predicación), que es, en realidad, la elección de una estrategia frente al objeto al que se ha conferido una intencionalidad: «El rayo mata, destruye». Estrategia, en principio, espacial, como la «captura», la «huida» o la «lucha».

El hombre es capaz, sin embargo, de *construir* pregnancias, de dar significado a formas que biológicamente no son interesantes [Fig. 5.5]. Es lo que asociamos a la *curiosidad,* a la *capacidad de análisis* del mundo, una vez resuelta la supervivencia. El lenguaje habrá de ir permitiendo diferenciar el «yo» del mundo «exterior» y darnos la posibilidad de la *autoconciencia.* En el extremo se instalará el enfermo patológico (neurótico), que identifica el lenguaje con el mundo exterior. Frente a los animales, que quedan constreñidos con necesidad biológica por las grandes figuras de regulación, el hombre es capaz de superarlas mediante la creación de «conceptos» contingentes. El arte, la religión, la filosofía -las figuras del Espíritu Absoluto hegeliano- ya son posibles.

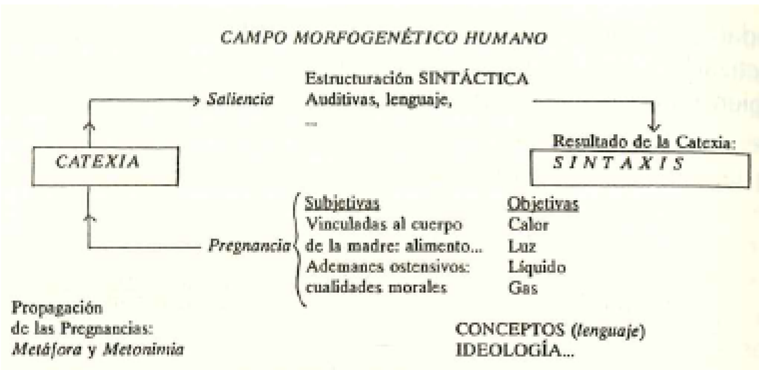


Fig. 5.5 Ontología Saliencia / Pregnancia

El lenguaje nos permitirá disminuir ese poder de fascinación de las formas externas, al construir conceptos que serán pregnantes. Esta tesis estaría corroborando la del psicólogo Nicholas Humphrey, quien tras plantearse la cuestión de qué es lo que hay de complejo e imprevisible en la vida de los seres humanos para que necesiten ser tan inteligentes, llegó a una respuesta sorprendente: *No es el mundo de los asuntos prácticos lo difícil de controlar, sino el comportamiento de los otros miembros de la especie.* Las relaciones humanas habrían jugado un papel más fundamental en el proceso de antropomorfización que la fabricación de herramientas, etc.: *"La historia de la sociedad humana en los últimos miles de años es la historia de lo que las personas se han* dicho *unas a otras, de lo que han* pensado *unas de otras, de rivalidades, de amistades, de ambiciones personales y nacionales".*

Este contexto psicológico es muy adecuado para entender por qué Thom se adentra en una teoría del origen del lenguaje. Este tema sobre «los orígenes lingüísticos», que despertara pasiones durante el siglo XVIII y buena parte del XIX, se convirtió en tabú cuando la Société Lingüistique de París resolvió en 1866 no considerar trabajos sobre el tema. Y, aunque este artículo de los estatutos fue eliminado en la reforma de la Société en 1876, la prohibición fue objeto de un consenso que permanece hasta nuestros días. La apuesta de Thom es, sin duda, una provocación a las tradiciones de su país, y se pone manos a la obra: El lenguaje se iniciaría como un grito de la presa-humana, que (jaría cuenta del peligro virtual o real ante la amenaza del depredador-animal; no carga, sin embargo, las tintas sobre el papel maniqueo de |o «nuestro» contra lo de «ellos». También se centra en la detección, mediante otro conjunto de signos, del posible «engaño» del enemigo «interior»; éste sería el privilegio de la *resonancia psicológica* entre humanos: tratar de comprender mediante signos lingüísticos el estado de ánimo del «otro». *"La vida en grupo incitó desde muy temprano* a *los hombres (y a los animales prehomínidos) a forjarse una representación del comportamiento de sus congéneres y en particular a forjarse una representación de los caminos de su regulación afectiva".* De ahí que las relaciones inmediatas sean tanto las relaciones circulares con sus congéneres como las relaciones con «seres» portadores de peligros potenciales (presumiblemente animales predadores), lo que nos llevaría a una tesis sobre la religión, como relación animal-hombre, muy espectacular, en la que aquí no podemos entrar[21]). En todo caso, esas señales asociadas a una situación biológica podrían considerarse como las primeras formas de los *conceptos:* clases de equivalencia entre formas salientes provocadas por la emisión de una señal.

Los primeros conceptos, la primera predicación, se iniciaría con los *deícticos.* El fenómeno lingüístico puro sería la *catexia* (objetiva, intergrupal, común a la especie) de una forma saliente sonora por una pregnancia. Una forma pregnante (alimento, calor...) se propaga a través de una saliencia (sonido, olor...), que suele estar vinculada al cuerpo de la madre: los sonidos que salen de su boca, las manos indicando objetos, etc. De ahí la necesidad de *indicar* (mediante deícticos o métodos semejantes) esta localización, que al principio está indeterminada y necesita auxiliares apropiados de naturaleza demostrativa para ser fijada. Thom trata de responder a una cuestión central: Las estructuras pregnantes ¿están o no determinadas genéticamente? Frente a la teoría estándar de la Biología Molecular, considera que las cadenas de ADN no pueden contener suficiente información para codificar todos los contornos que los objetos pueden adquirir en un espacio tridimensional: a lo sumo pueden aproximarse a la estructura topológica global. Se necesita *aprendizaje, transmisión cultural, lenguaje.* El lenguaje sería uno de los medios más decisivos para el reconocimiento de las *formas,* tanto de aquéllas con las que hay que asociarse, como de aquéllas otras de las que hay que huir. Una de las motivaciones de la función lingüística es destruir la «alienación» primitiva por las formas pregnantes. Entre el alimento y el predador, entre las parejas sexuales, entre el atacante y la huida... se crea un espacio intermedio, un espacio *semántico* en el que surgen los conceptos y que matizan la vida de los hombres: la comida tiene lugar a unas horas determinadas, en unos lugares determinados (la casa propia, por ejemplo; hay que pensar en lo que esto significa de cara a la propiedad privada, etc.); el piropo, el requiebro, las coplas... distancian las relaciones entre varones y mujeres; la negociación reemplaza al conflicto, etc, etc.

NOTA: Estos dos primeros apartados no son en absoluto gratuitos, porque funcionan como *operadores* que permiten pasar de la *teoría matemática* al dominio de la Lingüística, por lo que están bien justificados: sólo pueden ser formas pregnantes aquellas que poseen cierta *estabilidad* interna; y el concepto de «Estabilidad» es preocupación central de la TC. Pero, en efecto, la TC es independiente de la Lingüística, no tiene nada que ver, en principio, con ella. «Resonancia» y «regulación biológica» pertenecen, digamos, a los *pre-ambula fidei* de la TC, a su preparación y propedéutica.

3) **El Desglose lingüístico de un proceso espacio-temporal.** Desde la teoría de la estabilidad estructural, las *estructuras sintácticas* habrían sido originadas por *interacciones biológicas.* Así se quiere dar cuenta del problema clásico de la *categorización.* Para la descomposición discreta del continuo de los procesos fenoménicos, la cuestión fundamental es la relación básica que se establece entre las pregnancias y las saliencias; las pregnancias que tienen éxito y catectizan saliencias adecuadas (que se van reforzando) son aquellas que se hacen *significativas.* La interacción biológica más estudiada y querida por Thom (tanto que a veces parece un arquetipo goethiano, un *ursprung)* es la «predación», ejemplificada por la frase: «El gato se come al ratón», prototipo de la estructura sintáctica: Sujeto-Verbo-Objeto. Estudiemos sus modulaciones:

1) El espacio-tiempo que interviene es el espacio *local* [Fig. 5.6a].

2) La interacción entre el «gato» y el «ratón» se reduce a su estructura catastrofista, que nos permite pasar del nivel de la objetividad al nivel de la sintaxis [Fig. 5.6b].

3) La frase nuclear que describe el proceso de captura es sintácticamente isomorfa a su grafo actancial. La estructura de la frase comprende un nudo verbal, un agente y un objeto, y su gramática superficial se resuelve, tras las reglas de esquematización, por una frase transitiva: Sujeto-Verbo-Objeto [Fig. 5.6c].

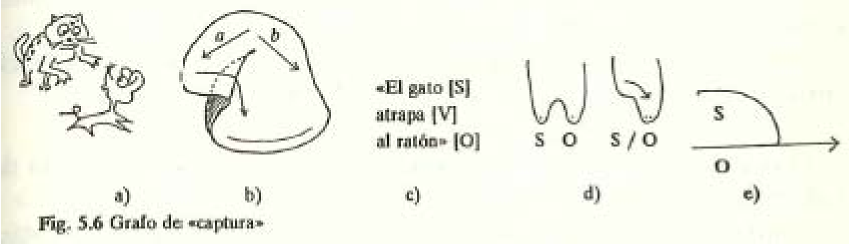


Fig. 5.6 Grafo de «captura»

4) Las relaciones entre actuantes no se traducen en términos de ideografía simbólica, sino en términos morfológicos, de tal manera que los valores posicionales sean definibles e identificables. S y O serán los mínimos del potencial [Fig. 5.6d].

5) El grafo de captura corresponde a un *proto-verbo* asociado a una semántica que genera la sintaxis correspondiente a la dinámica interna de la catástrofe asociada: la Semántica engendra la Sintaxis [Fig. 5.6e].

En la figura 5.6 tenemos representado el proceso: a) la Captura real; b) la Estructura topológica de la superficie de catástrofe; c) la frase de la gramática superficial; d) los valores posicionales; e) el grafo actancial correspondiente. Desde esta interpretación, establecemos dos definiciones y dos hipótesis:

Definición 5.1. *Toda Frase Nuclear está asociada a un esquema de naturaleza espacio-temporal, y es, esencialmente, el resultado de un conflicto de regímenes locales -que, en lingüística, toman el nombre de* actuantes- *y que se disputan el dominio* R^4. *La complejidad morfológica local está, pues, drásticamente limitada por la dimensión del espacio-tiempo. De esta manera, las morfologías posibles (equivalencias topológicas) constituyen un número muy pequeño: ±16, lo que hace que la teoría sea muy manejable.*

Tan sorprendente tesis supone que las grandes estructuras sintácticas han surgido de la estructura de las grandes interacciones de la regulación biológica, vinculando de esta manera Biología y Lingüística, siendo la TC la que permite la traducción de las unas a las otras, al constituirse como el saber que ofrece la estructura de los *invariantes* intermedios. Thom ofrece las siguientes correlaciones:

- El Nominativo excita la zona ergativa del organismo, es decir, aquellas partes que satisfacen las necesidades de energía química, por mediación de las catástrofes de *recepción,* de *ingestión,* etc.

- El Acusativo excita la zona caudal, la parte de las extremidades del organismo, por medio de las catástrofes de *lucha, captura,* etc.

- El Dativo excita la zona cefálica de recepción según catástrofes de *excreción, destrucción, aniquilamiento...)*

Definición S.2. *Los Actuantes se consideran como puros lugares de transferencia y de circulación de valores de los objetos.*

El número de actuantes -según la regla de fases de Gibbs- será de cuatro: Sujeto, Objeto, Destinatario, Instrumento.

i) *Sujeto:* El sujeto es el actuante que sobrevive a la primera catástrofe del proceso. Se simboliza por el mínimo de la función al descender el eje del tiempo. Sea una frase transitiva *SVO;* supongamos que esa frase describe un proceso temporal en el que hay dos actuantes, caracterizados por dos dominios disyuntas del espacio. Si al final del proceso sólo hay un actuante, caracterizado por un único dominio del espacio, el actuante que sobrevive es el *sujeto gramatical.* La intencionalidad de los sujetos-actuantes se sustituye por sincretismos actancia-les: sujeto o antisujeto sintácticos.

ii) *Objeto:* El caso semánticamente más neutro. Si un actuante desaparece en el proceso, se dirá que, gramaticalmente, es un *acusativo.*

iii) *Destinatario:* Es el actuante asimétrico [Cap. 1] del Sujeto, que puede aparecer interesado por el mismo objeto que el Sujeto, convirtiéndose, en este caso, en un Anti-sujeto.

iv) *Instrumento:* La fuerza o el utensilio inanimado que interviene en la acción y es emitido por el Sujeto y que provoca la catástrofe querida sobre el objeto. Es una prolongación material del organismo, vector de una pregnancia biológica. Algunos verbos exigen que el sujeto gramatical sea el instrumento, como en la frase: «La espada defendió mi vida».

Además, hay que contar con los *Localizadores,* que sitúan la acción en el espacio-tiempo, en ciertos espacios de cualidades semánticas: los adverbios de tiempo y de lugar, los tiempos de los verbos, los artículos, los pronombres personales y demostrativos...

Las hipótesis objetivistas de Thom pueden resumirse en dos:

Hipótesis 5.1. *Las gramáticas que se sitúan en la bisagra lenguaje/ pensamiento y que suponen que la estructura de la frase refleja la estructura dinámica de la catástrofe exterior son gramáticas con relaciones actanciales.*

El problema surge cuando se pretende hallar un *formalismo* que dé cuenta de los actuantes. ¿Es posible su representación matemática? Las gramáticas *actanciales* deberán expulsar el semantismo *sustancial,* si quieren llegar a ser auténticamente *sintácticas,* para lo que debe definir formalmente los papeles semánticos a partir de una figuración abstracta de relaciones actanciales. La TC, que es el formalismo propuesto, no es *deductivo,* tal como lo hemos mostrado en el cap. 3. Ahora habremos de mostrar que es *clasificatorio.*

Hipótesis *2. La parte propiamente subjetiva en la creación del sentido -o capacidad significativa- es menor de lo que se cree. Hay que tener presente la Limitación Semántica que impone la Topología espacio-temporal.*

Cuando se asocia la significación al *nudo o* parte central descrito por una de las morfologías arquetípicas o, excepcionalmente, por una sub-morfología, v. ge, una arista del grafo, es fácil intuir por qué la significación está fuertemente constreñida por las valencias de los verbos. Esta hipótesis es fundamental en este libro: de todas las posibilidades teóricas de la TC en su aplicación a la Lingüística[25], nos interesa destacar las *limitaciones semánticas,* a lo que se dedicará el capítulo 7.

5.3. EL UNIVERSO SEMÁNTICO DE LA TEORÍA NATURALISTA-GEOMÉTRICA DE THOM

En la introducción hemos hecho referencia a la sugerente hipótesis de Thom que representa el Universo Semántico como una morfología cuyo sustrato es un espacio euclídeo de *n* dimensiones que se proyecta en el espacio unidimensional del lenguaje por mediación del espacio R^4. Mas ¿cómo imaginar este pensamiento anti-reduccionista? Thom rechaza la tradición *atomista* que considera el Universo como una sopa de electrones, protones, fotones..., pues ¿cómo podría organizarse esta «sopa» a nuestra escala, en un mundo relativamente estable y coherente, lejos del caos cuántico y mecanicista del *atomismo.* Comenzamos citando algunos intentos de nuestra tradición en los que se ha pensado el programa «estructuralista». A continuación, recorreremos los elementos conceptuales que permiten comprenderlo en el contexto de la Topología. Y, finalmente, destacaremos algunas consecuencias de la posición anti-reduccionista.

1) La tradición

- Heráclito *(fl.* 504 *a.n.e.)* denominó a la estructura en la que una figura reposa -lo que hoy llamaríamos su *estabilidad estructural-,* su *logos:*

"El maestro cuyo oráculo está en Delfos no dice ni oculta nada, sino que solamente ***significa*** (oT|uaicoei)". *"Hay que seguir lo que es común, es decir, lo que pertenece a todos. Porque lo que pertenece* a *todo ser es común. Pero aunque el* **logos** *sea común a todos, la mayoría de los hombres viven como si poseyeran un pensamiento particular".*

- La Metáfora de la Caverna de Platón (427-347 *a.n.e.):* Los hombres no percibimos más que las proyecciones de las Ideas, de los Objetos reales (variedades multidimensionales) sobre un «muro» (nuestra retina), pero nunca los objetos reales mismos, excepto por reconstrucción topológica:

"-¡Qué extraña escena describes -dijo- y qué extraños prisioneros! -Iguales que nosotros -dije-, porque en primer lugar, ¿crees que los que están así han visto otra cosa de sí mismos o de sus compañeros sino las sombras proyectadas por el fuego sobre la parte de la caverna que está frente a ellos?".

- Micro / Macrocosmos. En semántica es necesario suponer un isomorfismo entre el *logos de* un ser material y el *logos de* su concepto correspondiente. Las interacciones semánticas entre conceptos son los reflejos -en el universo semántico- de las interacciones biológicas o físicas. Pero si el lenguaje es significativo, ¿manifestará el lenguaje (microcosmos) la realidad (macrocosmos)? De entre todos los errores antiguos y medievales que el pensamiento moderno repudió, el mayor, sin duda, fue esta insistencia de la teología en presentar a la física como un subapartado suyo, como si las leyes físicas (del microcosmos) fuesen una proyección de las leyes de la divinidad (el macrocosmos) y la física, objeto de estudio de la teología. El rechazo a la teoría del micro-macrocosmos que la sostenía fue absoluto. Pero a veces esta relación parecía querer apoyarse en algo más sólido. La metáfora del hombre como una proyección cartográfica se intuye en este texto de Fray Luis de Granada (1504-1588):

"Pues *así podemos decir que el hombre es como una breve mapa que aquel soberano artífice trazó, donde no por figuras, sino por la misma verdad, nos representó cuanto había en el mundo".*

- Spinoza (1632-1677). Todo ser puede considerado como un accidente local en un espacio sustrato. Para que pueda ser reconocido como existente es necesario que mantenga un mínimo de estabilidad a escala humana. En un conjunto de proposiciones de cuño materialista, por ejemplo disolviendo el prejuicio espiritualista de la acción del alma sobre el cuerpo -cuyo trasunto actual podría ser la acción del sistema neuronal sobre el inmunitario-, escribe Spinoza:

"Cada cosa se esfuerza, en cuanto está a su alcance, por **perseveraren** *su ser.*

2) **Elementos de la Teoría Semántica de Thom**

La Semántica de Thom se define, al modo negativo, en relación polémica contra el estructuralismo saussuriano y el generativismo chomskyano. Y, al modo positivo, por un análisis muy original del verbo. Señalaremos ahora algunas notas caracerísticas de la *Semántica de las Singularidades.*

i) Frente al carácter «arbitrario» del signo, su carácter «naturalista».

Saussure señaló la dualidad del *signo:* a) el *significante,* unilineal; las palabras serían una estructura algebraica (monoide libre) engendrada por las ±28 letras del alfabeto, b) El *significado, o* sentido, al que se accede por introspección. El lazo de unión sería, entonces, convencional o arbitrario. Este carácter arbitrario del *signo* está vinculado, en la tesis thomiana, a la aparición de las diversas lenguas y proviene de la hipótesis de la *proyección topológica:* A toda frase nuclear se le asocia un esquema de naturaleza espacio-temporal. Este esquema es representaba en un espacio de dimensión R^4. Pero cuando queremos enunciar este esquema en la cadena hablante, como esta cadena es de dimensión uno, R^1, necesitamos proyectar una estructura de dimensión R^4 en R^1, i. e., *f.* R^4 H> R^1. Esta proyección simplificadora puede hacerse según diversas direcciones y según diversos criterios. La tipología es una consecuencia de la *arbitrariedad* de esta proyección. V. gr., la de Greenberg. Supone que el chino es una lengua de tipo: *SOV;* el francés *SVO,* etc. El «lenguaje del pensamiento» está conectado con lo real por resonancia. Pero los signos implican un acoplamiento percepto-concepto de tipo «neutro», que constituye el objeto de un largo aprendizaje. En definitiva, la variedad del lenguaje se debe más al nivel lexical que al sintáctico.

La arbitrariedad del signo procede de la gran complejidad de un concepto. Un concepto necesita, al menos, tres espacios:

1) El espacio sustrato, que puede ser el espacio ordinario: euclídeo.

2) Un espacio interior que comporta una frontera a la que defiende por mecanismos de regulación.

3) Un espacio indiferente por donde se trasmita el concepto y se transporte sin perder sus cualidades ni su identidad semántica, que, **sin** embargo, puede sufrir variaciones accidentales.

(No hay que asustarse. Esto ya lo puso de relieve Gorgias (485-380 *a.n.e)* al distinguir la inconmensurabilidad entre la realidad (el *árbol),* la representación psíquica (la imagen sensitiva *«árbol»)* y los sonidos (la pronunciación *á-r-b-o-l).*

En la mayoría de los casos no se puede simular completamente una estructura tan compleja como las «vivencias», a través del simple significante fonético. No se puede traducir-proyectar un concepto en palabras mecánicamente y de manera única. De ahí la dificultad de los jóvenes, estudiantes, aprendices... para expresarse. Podemos tener el concepto, pero no sabemos ponerlo en palabras... Son los famosos eufemismos: «Lo tengo en la punta de la lengua», «Es que no me sale», etc. Lo arbitrario del signo procede de este paso, de una pérdida de contenido semántico -aunque no de *todo* contenido semántico- en las sucesivas proyecciones.

La Significación, explica Thom, se encuentra en la naturaleza, entendido esto en el sentido siguiente: la significación es la estabilidad de los mecanismos de regulación. Ésta expresa el carácter significante de una estructura.

"Sí, estoy tentado en decirlo. Estoy de acuerdo con el viejo punto de vista aristotélico según el cual el lenguaje en sus partes refleja la realidad, es un modelo relativamente preciso de la realidad. Sí; sostendría este punto de vista, efectivamente".

ii) Categorías Gramaticales Fundamentales. La importancia del Verbo

En vez de seguir la vía de la *formalización* de tipo lógico y su teoría de Modelos, se trata de construir los principios de los *universales lingüísticos* desde una fenomenología matemática (topológica) de la regulación biológica, una especie de deducción trascendental kantiana de las condiciones *a priori* de la creación de formas lingüísticas. Estos universales son anteriores a la distinción de las dimensiones del lenguaje: semántica, sintáctica y pragmática, como señala Petitot. Son, a la vez, actos de enunciación, categorías naturales del mundo y reglas abstractas de encadenamiento de símbolos.

El formalismo de la TC no es, por tanto, un formalismo de tipo lógico *(autoformanté).* Parte de una sentí-lingüística que trata no tanto de la algebrización de los automatismos de la competencia lingüística como de la clasificación de las estructuras profundas de regulación biológica y del semantismo formal de las relaciones primitivas en el marco de una teoría dinámica de la actuación *(performance).* ¿Cómo formalizar, entonces, la *significación* si pierde la autonomía en el campo de la física (resonancia), en el de la biología (regulación) y en el de la etología (relación entre organismos)? Hay aquí un giro, más que epistemológico, gnoseológico.

a) En primer lugar, según Thom, habríamos de hablar no tanto de categorías en el sentido kantiano como de *universales lingüísticos* impuestos por la fenomenología de la realidad.

b) Para comprender las categorías o partes del discurso, se puede intentar ordenarlas siguiendo la actividad del locutor (en el sentido de Chomsky), por oposición a su estructura permanente (en el sentido de Saussure). Estos elementos superiores (sintaxis) conllevan una significación autónoma, independiente del contexto y de las circunstancias. De esta manera se obtiene una clasificación según la mayor o menor estabilidad de las partes de la oración. El Sustantivo será la parte más estable. Le siguen a continuación: el Verbo, el Adjetivo, los Numerales y los Deícticos [Fig. 5.7].

Todo texto es descomponible en frases dotadas de significación autónoma que describen procesos espacio-temporales y cada frase, en palabras, las creodas; éstas, a su vez, en sílabas y éstas, en fonemas, tal como establece la propiedad de la «doble articulación». Cualquier frase puede transformarse en otra *atómica,* que comporta una palabra esencial: el *verbo.* El verbo ejerce una suerte de punto central y articulador en la ordenación de la Gramática Universal:

En el eje *OX:* el significado-ém/co de un concepto sería comprendido como algo temporalmente invariable y no localizado, autónomo, independiente de la actividad del locutor. El significado-ético no estaría vinculado canónicamente a la palabra, sino a una posición específica de nuestro cuerpo.

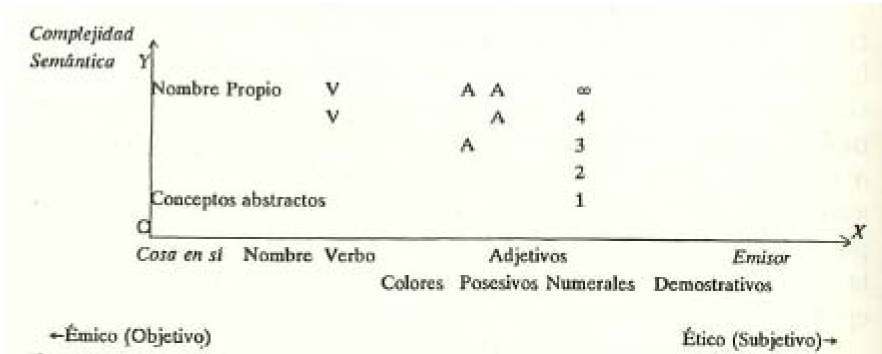


Fig. 5.7 Categorías lingüísticas

En el eje *OY:* la complejidad semántica procede de la cantidad de espacios requeridos para su regulación, actividades mentales, etc. Así que un nombre complejo, v. gr. «hombre», requiere de muchos verbos para caracterizarlo, como sabía Descartes: *"Soy una cosa que piensa, es decir, que duda, afirma, niega, conoce unas pocas cosas, ignora otras muchas, ama, odia, quiere, no quiere, y que también imagina y siente..."*. La siguiente cita de Thom nos será más tarde de mucho provecho:

"«Hombre» es, pues, un concepto extremadamente complejo, y para expresar todos los significados asociados a él hay que utilizar un gran número de verbos. Por el contrario, si se toma un concepto extremadamente simple y abstracto como «unidad», se ve enseguida que puede describirse geométricamente con un «pozo» parabólico de potencial. Entre «hombre» y «unidad» están todos los demás conceptos".

EL VERBO: La categoría articuladora de la teoría de Thom es el verbo. Por una parte, en tanto en cuanto juega el papel de centro organizador de un *suceso,* el verbo distribuye los lugares actanciales, describe procesos, y posee, en él mismo, la razón de su estabilidad; el verbo, que se desarrolla en el *tiempo,* está más cerca de la situación subjetiva del hablante, de la «vivencia» en el sentido orteguiano. Por otra, la sintaxis estructural es una sintaxis dinámica o de acontecimientos del *verbo,* y se opone absolutamente a la concepción *lógica* en función de los valores de verdad. Enumeraremos algunas de las características que el estudio del *verbo* permite desde la TC.

i) El verbo tiene la función de simbolizar el paso brusco entre la *catexia* virtual del sujeto por una *pregnancia* y la satisfacción que es el resultado del acto. En el ejemplo «El gato se comió al ratón»: 1.- El Sujeto queda catectizado por una pregnancia virtual (hambre). 2.-Cuando aparece el Objeto, el Sujeto emite hacia el Objeto una pregnancia local (captura). 3.- Surge un conflicto entre el Sujeto y el Objeto; el resultado del conflicto está ya contenido en la significación del verbo, que expresa la satisfacción del Sujeto (comida).

ii) Una de las propuestas de mayor calado de Thom es la de reivindicar para la ciencia el concepto de *causalidad* -tras el largo paréntesis en que fue reemplazado por la interpretación nominalista del concepto de *función* [Cap. 1], Los verbos sirven para describir efectos *causales* y la causalidad está expresada de manera intrínseca en el lenguaje ordinario. Si no se puede negar la realidad ontológica a los efectos causales y si del lenguaje natural no se puede prescindir ¡ni siquiera en matemáticas!, es necesario admitir el término medio: el lenguaje ordinario está comprometido con la *causalidad.*

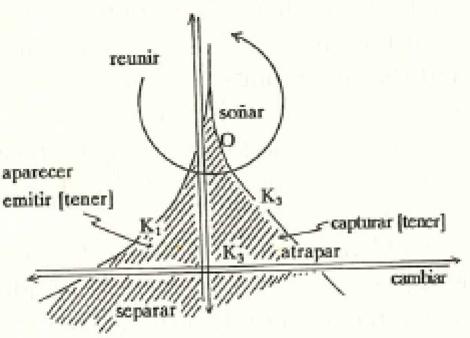


Fig. 5.8 Caminos de los verbos en el espacio de control de una singularidad «cúspide»

iii) La significación del verbo puede simbolizarse como una clase de caminos transversales a una hipersuperficie de catástrofe[41] que describe el paso repentino y brutal de un estado estable 1 a otro estado estable 2. Como los verbos se representan -según el modelo de la TC- a la manera de accidentes dinámicos que se van sucediendo a lo largo de caminos que atraviesan los conjuntos de bifurcación, la riqueza semántico-topológica procede de la multitud de caminos que se pueden trazar. Tales caminos «espacializan» lo que normalmente se denomina *aspectos verbales.* Dentro de la, en principio, infinidad de aspectos que puede tomar el verbo al atravesar el plano de control [Cap. 4], sólo alguno de ellos, en número finito, son los verdaderamente relevantes. Así en la figura 5.8 se dibujan los caminos de los tipos de verbos más significativos en el espacio de control de una catástrofe *cúspide:*

- Si se considera una sección transversal al estrato de Maxwell *K->,* se obtiene un grafo de conflicto en el que un actante domina a otro y lo hace *cambiar de* estado; es el camino de los verbos *pasar, transformar...*

- Si se considera una sección que atraviesa el estrato de Maxwell y el centro organizador *O,* se obtiene el camino de los verbos *reunir, unificar...* y, en sentido inverso, *separar, diferenciar...*

- Si se considera un camino transversal al pliegue *Kj,* se obtiene el camino de los verbos *capturar, coger...* y, en sentido, inverso *emitir, escindir...*

- Si se considera el camino transversal al pliegue *K-¡,* se obtiene el camino de los verbos *percibir, aparecer...*

- Si se considera el camino transversal que cruza el pliegue *K-i,* y el estrato de conflicto /C3, se obtienen los verbos *soñar, identificarse...*

Si tenemos en cuenta solamente uno cualquiera de los verbos, algunas direcciones son más dominantes que otras. Por ejemplo, el verbo *teneres* considerado, la mayoría de las veces, como «perfectivo» -en el sentido de *coger, agarrar* (camino transversal *Kj)-* que domina al aspecto «incoativo» del verbo -en el sentido de *dar, emitir* (camino transversal *K-¡)-.*

iv) El verbo juega el papel de «centro organizador» y, por tanto, es de una naturaleza más bien *local* que *global.* El lado no-verbal de la intuición corresponde a su carácter topológico global.

v) Una cuestión central para la teoría es la siguiente: ¿Cualquier frase elemental descrita por una topología es una de las morfologías arquetípicas? Hay que restringir la respuesta afirmativa, porque los verbos pueden pertenecer, al menos, a cuatro clases diferentes:

1. Verbos *procesuales.* Los verbos describen, en principio, procesos. Todo verbo da nacimiento a un sustantivo abstracto de acción y se identifica con una de las dieciséis morfologías arquetípicas [Cf. *infra,* cap. 6].

2. Verbos *repetitivos o iterativos,* que indican la repetición indefinida de una acción expresada bajo una morfología arquetípica. Ello se indica mediante los afijos como el «re» de *re-petir,* aunque no sean necesarios; así, hay verbos de movimiento como *balancear, vibrar...,* que implican la iteración de la morfología que describen.

3. Verbos *estáticos:* «rodear», «cercar»..., que expresan el hecho de que una entidad impide a otra -canalizada o no- poder difundirse.

4. Verbos «de *ausencia»,* con formas especiales de escisión: «perforar», «agujerear».

vi) El proceso espacio-temporal es descrito por un verbo que establece un espacio de iteración de zonas conexas asociadas al Sujeto, al Objeto, al Destinatario..., siguiendo la *valencia* del verbo en el sentido de Tesniére[42]. Pero el verbo no sólo contiene la morfología arquetípica, sino algo más: restricciones a las capacidades regulativas de los diferentes actuantes. Los verbos -como antaño intuyó Herder- dan lugar a sustantivos abstractos de acción a través de la forma del infinitivo, y no al contrario (incluso toda una frase puede transformarse en sustantivo por mediación de la locución: «El hecho de que...»).

Una de las aportaciones más decisivas de la TC -consecuencia de esta restricción- pasará desapercibida, hasta que alguna universidad anglosajona caiga en la cuenta, / *suppose.* Y no es otra que la importancia de la valencia verbal, y *a fortiori* de las figuras de la TC, para la formulación de Teoremas de Limitación Semántica, paralelos a los Teoremas de Limitación Sintáctica (cuya formulación más conocida es la de Godel (1906-1978)). En este sentido se pueden interpretar las siguientes palabras de

Petitot: *"Les graphes actantiels sont génériques et réalisés dans l'espace-temps.* Leur complexité morphologique lócale est done drastiquement bornee par la dimensión de l'espace-temps. Ce *fait essentielle peut étre consideré comme une explication de la limita-tion -de toute évidence intrinséque, non contingente- de la valence verbale. Comme nous l'avons deja noté..., catastrophiquement parlant, la limitation de la valence verbale est un phénoméne profond qui est l'aspect lingüistique de la regle des phases en physique".*

vii) El verbo es inestable debido a los puntos catástrofes y al carácter indefinido de los actuantes, por lo que se requiere un «esfuerzo» permanente para estabilizarlo. ¿De dónde procede la eficacia de la estabilidad? Es preciso que el verbo posea las razones de la estabilidad en la geometría misma de la acción que define. Por ejemplo, los verbos de movimiento hallarán la razón de su estabilidad en la Mecánica. Verbos como *caer, rodar...* sólo tienen cabida en un mundo gravitacio-nal (en lo que estarían de acuerdo Aristóteles, Galileo y el común de las gentes; otra cosa es el formalismo empleado por cada uno de ellos[44]). Si los verbos hallan en la Mecánica la razón de su estabilidad, nada tiene de extraño que el lenguaje quede estructurado como una Física y vinculado a relaciones de «causalidad» (véase el punto ii)).

EL SUSTANTIVO: Recordemos un doble resultado obtenido: a) el isomorfismo defendido en el capítulo anterior entre los mecanismos psíquicos que aseguran la estabilidad de un concepto, *Q,* y los mecanismos físicos que aseguran la estabilidad de los objetos reales, e interpretémoslo según las tesis de la resonancia y los mecanismos neurofi-siológicos a la manera de la escuela psicológica de la *Gestalt* (no ato-mista y no reduccionista); b) la tesis ontológica: el semantismo de la relación lenguaje-realidad está constreñido *{contraint]* por la realidad que permite simular. Entonces, los sustantivos representan la parte más estable de la situación, que es aquello que se denomina *objeto real.* Los verbos describen, en principio, un *estado* y son, por tanto, actuantes; en virtud de ello son considerados como la única categoría lingüística que posee una cierta autonomía semántica; decimos que son la parte más estable de la oración, porque el resto de categorías gramaticales necesita de la actividad del locutor.

El Sustantivo puede identificarse con el Nombre Común, que no está, en general, localizado; es el Nombre Propio el que comporta su propia localización espacio-temporal. En este sentido, los sustantivos podrían definirse como aquellos términos que pueden ser sustituidos por nombres propios, i. e., por individuos bien definidos.

EL ADJETIVO: Es la parte del lenguaje que categoriza los espacios semánticos cualitativos. Por ejemplo: al localizar los sustantivos en los espacios de cualidades sensoriales: campo de los colores, sonidos, etc.

Bien entendido que si determinados objetos como los seres vivos o los cuerpos sólidos poseen una regulación espacial bien acotada, las cualidades sensibles -como el adjetivo de *rojo*- no tienen unas fronteras tan fijas y estrictas como las de los sustantivos. ¿Dónde el límite entre el *rojo I* el *naranja* / el *amarillo*[1]. Los Adjetivos son -hablando hegelia-namente- seres situados en el umbral entre el ser-en-sí (la realidad) y el ser-para-sí (relación a un sujeto perceptivo).

En todo caso, el ámbito del adjetivo debe situarse en los procesos de regulación del sujeto hablante y no en aquéllos del objeto del que se habla. Así la frase atributiva: «El cielo está azul» significará: «Si el cielo está azul, entonces no cogeré el paraguas», destacándose la acción que lleva a cabo el sujeto -«coger o no coger» el paraguas-, sobre la situación objetiva -«estar o no estar» azul el cielo-.

El Adjetivo posee una densidad intermedia entre el Sustantivo y el Verbo. Se aproxima al Sustantivo porque posee un carácter invariante, independiente del tiempo. Un adjetivo que describe una cualidad sensorial puede ser considerado como un *actuante;* es un espacio de coordenadas internas que describen ese tipo de cualidades sensoriales, aunque sus fronteras sean más imprecisas e indeterminadas -*azul, prudente*- que las del sustantivo. Se acerca al Verbo porque, como él, necesita, para estabilizarse, que se desplieguen todos los posibles actuantes.

LA PREPOSICIÓN: El papel de los *Casos o* de las *Preposiciones* evitan la ambigüedad de las resonancias, y, por consiguiente, de las significaciones. Su utilidad es enorme porque, en la interacción de los conceptos invocados por las palabras, conducen a un máximo de entropía (máximo orden) tratando de evitar los tanteos inútiles y los errores.

EL ADVERBIO: Es un operador que pertenece a la amplia clase de los localizadores y modula la acción del Verbo o la intensidad del Adjetivo. Los Adverbios, que sitúan la acción en el espacio-tiempo o en ciertos espacios de cualidades semánticas muy generales, admiten una gama muy amplia de matices: Intensivos como *muy,* Cuantitativos como *mucho, demasiado....* Los Adverbios, que son esencialmente localizadores cualitativos, pueden ser de Lugar, de Tiempo, etc.

LOS DEÍCTICOS. ARTÍCULOS, PRONOMBRES: Los actuantes de potencial más profundo -los sustantivos- son individuos cuya localización viene indicada por el Nombre Propio; la situación se hace más compleja con los Nombres Comunes, que tienen necesidad de una localización espacio-temporal. Pues bien, los *deícticos* cumplen un papel de orientación espacial y sincronización temporal[45]. Así, el artículo determinado vincula los actuantes de una frase a los actuantes de frases anteriores; es una especie de deíctico vago cuyo objeto es el universo de discurso en el instante en que se emite. El artículo tradi-cionalmente llamado indeterminado se utiliza para referirse a un actuante al que el hablante es incapaz de señalar.

LA CONJUNCIÓN: La parte más superficial del lenguaje es la que tiene como función articular Verbos o Proposiciones [Cap. 1], Este papel lo cumplen las Conjunciones, que poseen una estructura de regulación muy próxima a los signos algebraicos, autoformantes [Cap. 3[. Puede establecerse en el lenguaje ordinario una distancia entre los Sustantivos y las Conjunciones, como lo hacíamos en el lenguaje formalizado entre signos topológicos y lógico-autoformantes; la Lógica actúa con más propiedad en el tratamiento de las *conjunciones* y la Topología, en el tratamiento de los Sustantivos y Verbos [Fig. 5.9].

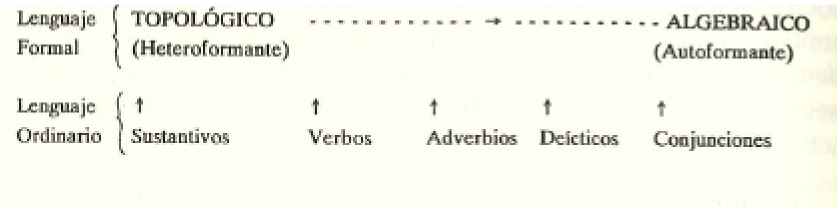


Fig. 5.9 De los Sustantivos (Topología) a las Conjunciones (Lógica)

La tesis fuerte de esta interpretación puede resumirse así: Teorema 5.1. *Los localizadores son prescindibles, porque el carácter significante de una frase es independiente de su localización espacio-temporal.*

Corolario 5.1. *La localización puede afectar a la Verdad (lógica) y/o a la Eficacia (pragmática), pero no al Sentido, al Significado semántico.*

iv) Teoría de la analogía

La *analogía* o el carácter contagioso del *logos.* ¿Cómo se controla la aplicación de las estructuras catastrofistas a la semántica? ¿Bajo qué principios y definiciones? La *analogía* como método de pensamiento ha sido el *cuélebre* de la modernidad, desde Bacon (1561-1626) a Diclerot (1713-1784), desde la Royal Society a los neopositivistas. El pensamiento analógico sólo podía conducir a apreciaciones vulgares y a resultados disparatados. Por razones que habría que hallar buceando en la Historia de la Ciencia, la simple mención de la palabra «analogía» es hoy todo un atrevimiento. Y si osado fue el ensayo de Platón, la posición de Thom es casi una afrenta. Cierto que, como el ateniense, el francés rechaza el concepto de *onomatopeya* para fundamentar su teorías semánticas[46]. Platón: porque, de no hacerlo así -decía-, sólo se podría captar la esencia de las cosas sonoras; Thom: porque un lenguaje onomatopéyico sería transparente y no tendría que ver con la comunicación, que es siempre oscura, opaca, mentirosa... Lo que la TC tiene en cuenta en Lingüística es el conjunto de singularidades, que, insistimos, hay que conceptualizar como un ente topológico, lo que le convierte en no trivial. Los fundamentos de la semántica catas-trofista no pueden quedar exclusivamente del lado de la regulación biológica, sino que han de soldarse con alguna TEORÍA SEMIÓTICA. Thom recurre a la teoría peirceana del signo: *"Toda discusión del simbolismo no puede partir más que de la clasificación de los signos -tan* *simple y tan profunda- que nos ha legado Ch. S. Peirce",* en contraposición a la otra clásica de Saussure[48]. La razón se encuentra en que aquélla es más valiosa para la construcción de una teoría semántica dinámica que la propuesta primero por los estructuralistas saussurianos y luego por los lógicos fregeanos.

Los componentes del famoso triángulo semiótico peirceano *-signo o representamen-objeto-interpretante*^- forman una unidad en la que no se puede eliminar la relación interpretante-objeto; pero, además, y dado que el acto semiótico tiene aspectos psicológicos, etológicos y sociológicos que los análisis semánticos han de integrar, convierte teóricamente en pernicioso el aislamiento de la Semántica Lógica, vinculada a la Teoría de Modelos.

En la relación Signo-Objeto, Peirce veía tres aspectos: Icono, índice y Símbolo. El Icono, que puede ser una imagen, un diagrama o una metáfora. La imagen se define por la *semejanza simple* y los diagramas y las metáforas por *semejanza compleja* entre Signo y Objeto. Este criterio es demasiado vulnerable, porque remite a una relación que no es ni transitiva ni unívoca [Cap. 1], ya que caben múltiples relaciones materiales de Semejanza. Platón, en el *Crálilo,* ya advirtió cómo el recurso a esta noción no es pertinente para elaborar un concepto de signo lingüístico argumentando su ambigüedad, puesto que todo es semejante en algún aspecto a todo. Para controlar la desmesura y |a arbitrariedad de la Semejanza como criterio semiótico, Thom propone una teoría matemática sobre el concepto de Analogía: *"Creo que, en cierto sentido la teoría de las catástrofes podría entenderse como una primera sistematización, bastante general, de la analogía".*

Wildgen, que sigue la semiótica de Peirce, ha encontrado en la Topología de Thom el elemento que podía faltar a la semiótica para establecer un criterio muy potente. Ha refinado el criterio peirciano, por considerar que el semiótico americano utiliza la Semejanza de un modo algo rudo *(rougth)* A la Semejanza hay que adjuntar los criterios de *Estabilidad y Selectividad* inspirados en la TC.

Estabilidad, porque la relación icónica es siempre parcial; cambios que se producen en las diferentes constelaciones de signos no eliminan necesaria ni sistemáticamente la similaridad; cada término de **la** tríada peirciana está expuesta a deformaciones que hay que analizar. Así, el Objeto puede tomar diferentes formas en el tiempo; el Signo puede cambiar con el uso; las Interpretaciones están expuestas a variaciones sociales o psicológicas. ¿Cómo se cambian y se alteran los elementos constitutivos de la existencia de una relación ¡cónica? La Topología es una herramienta que puede permitir controlar esos cambios.

Selectividad, porque la relación icónica no ha de reproducir todo el objeto (recuérdese los académicos ridiculizados por J. Swift, cargados con tantos signos como objetos) sino sólo ciertos módulos. La TC ofrece un criterio de selección de acuerdo con el tipo de singularidad -las catástrofes- donde tienen lugar los cambios. A este criterio, que podríamos llamar de Thom-Wildgen, hay que añadir dos limitaciones: a) La Analogía ha de entenderse bajo un proceso de espacialización (localidad). S) La Analogía no es un proceso indefinido cuya consecuencia sea la circularidad semiótica, sino que alcanza un límite determinado por ciertas categorías.

α) El proceso de **espacialización (local)**

La restricción impuesta a las frases elementales por la valencia verbal comporta otra más: toda frase describe un proceso dado en el espacio-tiempo, recalcando el componente de Espacio frente al de Tiempo, desarrollado por Bergson o Heidegger en nuestro siglo.

Una consecuencia muy a destacar es la hipótesis psicológica de que todo proceso psíquico es un proceso dinámico en un espacio R^n, siendo n enormemente vasto. Thom afirma que no hay ninguna expresión lingüística que no pueda ser interpretada espacialmente, incluidas las referentes a ¡os sentimientos. La TC permite modelar geométricamente una vasta gama de fenómenos e incluso de cualidades afectivas -agresividad, odio, amor...- al interpretarlas geométricamente. Aunque la dinámica de nuestra actividad psíquica opere con un número de dimensión (y codimensión) muy superior a cuatro, cuando se trata de expresar las experiencias reunidas en la psique, estamos obligados a efectuar una serie de secciones locales tetra-dimensionales, que corresponden a los tres parámetros del espacio y uno del tiempo.

β) No es un proceso indefinido

Una tesis que se ha establecido casi como un dogma en las últimas décadas y que ha hecho estragos en el llamado a veces postmodernismo, a veces pensamiento débil, ha sido la de la circularidad semiótica como un proceso hermenéutico indefinido. Si todo signo se refiere **a** otro signo, la interpretación tiende a constituirse en un proceso inacabable de transformaciones de un significante a otro, olvidando precisamente el significado. La geometrización del sentido permite resolver este problema de la hermenéutica tradicional, al romper esta circularidad y proponer un nuevo tipo de categorización del mundo.

¿Cómo puede realizarse la ruptura de la circularidad semiótica? Sólo suponiendo que hay significados básicos, es decir, que el signo toma como referencia una situación, un acontecimiento regido por un arquetipo semántico. El peligro es siempre enorme porque podría caerse en otro dogma no menos nefasto: el dogma espiritualista o idealista, que supone significados ya prefijados, eternos, venidos de un reino espiritual o trascendente. Pero este peligro se evita por mediación de una Ontología como la que está suponiendo la TC al comprender las entidades matemáticas como entidades materiales, dadas localmente: los únicos conceptos que pueden definirse de manera intrínseca son aquellos con posibilidad de localización espacial. Todas las etapas intermedias, las múltiples interpretaciones especulativas, imaginarias, fantásticas, han de poder neutralizarse, pues sólo las situaciones geo-metrizables podrán convertirse en conceptos. Los logos, arquetipos o catástrofes pierden buena parte de sus connotaciones esotéricas y se justifican como procesos de control del espacio ambiente y de autoregulación de las necesidades fisiológicas, el miedo, el hambre, la sexualidad... a partir de unos esquemas algebraico-topológicos que los explicitan.

En cualquier situación de tipo biológico, el símbolo habrá de remitirse a una Forma Fuente que culmine en un desenlace de satisfacción o frustración. Las Formas-Fuente semánticas funcionan como una especie de cierre hermenéutico. Este hecho permite la posibilidad misma de afirmar una teoría de las categorías humanas, que estarían organizadas a partir de los tipos de singularidades. Las grandes cuestiones responden a los grandes tipos de regulación biológica.

Pero frente a la categorización aristotélica, que sigue muy de cerca a la vez la gramática griega y la gramática judicial; o frente a la categorización kantiana, que sigue el patrón de la clasificación lógica de los juicios -de las conjunciones, diríamos nosotros ahora-, Thom propone una categorización clasificatoria como un catálogo de construcciones posibles de entidades estables, que podría empezar a gestarse a partir de los arquetipos semánticos que se expondrán en el capítulo siguiente -canalizar, capturar, fallar, enviar, penetrar, moldear, excavar...-.

EJERCICIOS

A veces nos encontramos textos literarios, ensayísticos y filosóficos, pero también juegos y divertímentos, que proponen diversas tesis coincidentes con la teoría de la morfogénesis como crítica a las teorías ¡ntuicionista o formalista, pero de manera puntual, aislada, no sistemática. Los ejercicios que se proponen a continuación pretenden que el lector reconozca en ellos algunos supuestos y tesis concebidas independientemente de la TC.

1) Quien quiera divertirse a la vez que fatigarse recursiv amenté puede recordar aquel juego infantil de «palabras encadenadas». Las reglas son muy sencillas: (I) Cada jugador, alternativamente, ha de ir mencionando una palabra. (II) La mención de cada palabra ha de hacerse incluyéndola en la frase que se va formando. La fatiga se notará a poco de empezar: ¿diez, veinte..., cien palabras? V. gr.: Jugador A: «En». Jugador B: «En el». A: «En el patio». B: «Y en el patio», etc. Enseguida hay que volver a empezar.

2) Trátese de leer el siguiente texto sin fatigarse:

"la archidiablesa proserpina confundió a fray anselmo de turmeda con san macario el desterrado cosa inexplicable y también quiso apartarlo de su destierro fray anselmo la espantó diciéndole vade retro del mal que hom té por d'aquell mateix mor recuerda maldita proserpina que as mulheres onde estáo sobejam e onde nao estáo faltam yo tengo bastante con la virgen santísima nuestra madre". CELA,C.J.: Oficio de tinieblas, 1066.

3) Estúdiese el concepto de «campo morfogenético» a la luz de la siguiente anécdota:

"El europeo apunta desde una distancia de doscientas yardas y mata uno. Pero [el hombre cazador, europeo y blanco] se sintió desilusionado ante los escasos elogios de un viejo cazador munchi que le había seguido. «Para un blanco no ha estado mal -había dicho el negro-. Pero nosotros lo hacemos mejor». Entonces ató a su cabeza el cuello y la cabeza de una especie de grulla y con la flecha dispuesta en el arco se arrastró, agachándose, hasta el rebaño, del cual hizo destacarse un espléndido macho. Luego se levantó súbitamente y se fue acercando a él mientras movía su cabeza enmascarada de un lado a otro, imitando al ave con perfecta pantomima. De esta manera, llegó a pocos pasos del animal y disparó hiriéndole en la paletilla. El antílope dio un gran brinco, y cayó al punto en redondo, muerto instantáneamente por el veneno de la flecha. He aquí dos técnicas opuestas, frente a frente. El europeo, amigo de la mecánica, mata por medio de una ley física. El negro, más próximo a las fuentes de la vida, se finge ave, es decir, mata con una metáfora". ORTEGA y GASSETJ: O.C., t. 3, pp 301-2.

4) Diseñar el espacio control de esta narración, entre el sujeto, el antisujeto y el objeto:

Dos hermanos juerguistas, los Nilsen, Cristian y Eduardo (SI y S2) están muy unidos. Cristian lleva a casa a Juliana y crea un desequilibrio. Eduardo se enamora también de ella. Ella es una cosa, un objeto. Para la lógica pulsional mejicana, algo que se usa sexualmente, sin que la tradición permita el enamoramiento. Pero los dos se enamoran del objeto del deseo y va a surgir un triángulo nada clásico. Cristian realiza una donación: «Ahí la tenes a la Juliana; si la querés úsala». El triángulo ya está formado: confianza recíproca diría el espectador. Uno se la cede al otro, el otro se la cede al uno, alternativamente: «Desde aquella noche la compartieron». Transferencia alternativa o Don recíproco. SI da el O a S2 y S2 da el O a S1. Y el O se da a los dos. Son transferencias comunicacionales, no polémicas. Pero surgen de manera inevitable los celos, una forma de buscar la estabilidad, y se hacen polémicas las transferencias. Para evitarlo, y hacer desaparecer el O común, un hermano abandona a Juliana en un prostíbulo. Pero no pueden olvidarla. Usando el caballo, ambos se acercan al O *alternativamente, engañándose sobre el motivo de sus viajes. Un día en que los dos coinciden en el prostíbulo, deciden llevarla a casa de nuevo y volver a la complejidad. Usan el O. Sus celos los pagan con otra gente, nunca entre sí, pues puede más su fraternidad. Tras asesinar Cristian a Juliana, los hermanos lloran, decicidos a olvidarla. Con la victoria del valor «hermandad» sobre el valor «sexo», los hermanos recuperan el equilibrio. Triunfa la relación (junción) SI JS2. No se da la clásica eliminación del antisujeto por el sujeto. BORGESJ.L.: "La intrusa", El Aleph.*

5) Estudíense en los siguientes textos las condiciones de posibilidad de la teoría de la morfogénesis en lingüística:

a) "Si intentamos cortar uno de los seres, ¿acaso habremos de cortar cada cosa tal como queramos y con el instrumento que queramos? ¿O si deseamos cortar cada cosa conforme a la naturaleza del cortar y ser cortado y con el instrumento que le es natural, cortaremos con éxito, y, por el contrario, si lo hacemos contra la naturaleza, fracasaremos y no conseguiremos nada? (...) Pues bien, ¿acaso el hablar no es también una de las acciones? (...) Entonces, ¿acaso si uno habla como le

parece que hay que hablar lo hará correctamente hablando así, o lo hará con más éxito si habla como es natural que las cosas hablen y sean habladas y con su instrumento natural, y, en caso contrario, fracasará y no conseguirá nada?". PLATÓN: Crátilo, 387b-c.

b) "Los nombres han surgido de los verbos, y no éstos de aquéllos. El niño no llama «oveja» a la oveja, sino «criatura balante», convirtiendo así la interjección en verbo". HERDERJ.G.: "Ensayo sobre el origen del lenguaje", Madrid, 1982, p. 169.

c) "En los libros de acústica suele verse dibujado el aparato de resonadores que Helmholtz ideó. Fórmalo una serie de esferas metálicas huecas, cada una de las cuales comunica con un mechero de gas. Los sonidos, según su varia calidad, hallan resonancia en una u otra de estas esferas, que al producirla envía un aliento a su llama adjunta, la cual vemos alargarse trémula, ondear, estremecerse, súbitamente dotada de más intensa combustión.

Algo parecido acontece en nosotros. Gira la vida en torno nuestro, presentando sucesivamente sus facetas innumerables. De pronto una de éstas envía a nuestro ser no sabemos bien qué reflejo alentador, y algo que, apenas sospechado, iba en nosotros, cobra repentina robustez. El germen de una idea, un sentimiento indeciso crecen en tal sazón rápidamente, hasta su completo desarrollo, afirmando e imponiendo su fisonomía dentro de nuestro ánimo". ORTEGA y GASSETJ.: O.C., t. 2, pág. 166.

6) Estudíense los conceptos de saliencia y pregnancia en la siguiente experiencia de Goodall y su reflexión final: "Indudablemente, eran una ¡fuerza y un vigor semejantes los que había desplegado el hombre primitivo para desafiar a los elementos":

"Los chimpancés descendieron del árbol y en fila india comenzaron el ascenso en dirección al claro que se abría en lo más alto del risco. El grupo estaba formado por siete machos adultos, entre ellos David y Goliat, así como algunas hembras y unos cuantos jóvenes. En aquel momento estalló la tormenta. Caía una lluvia torrencial y el fragor súbito de un trueno me sobresaltó. Como si de una señal se tratase, uno de los machos se puso en pie y comenzó a balancearse rítmicamente, apoyándose primero en un pie y luego en el otro, emitiendo al mismo tiempo alaridos in crescendo hasta dominar al ruido de la lluvia. De repente arrancó en veloz carrera cuesta abajo, en dirección a los árboles que acababa de dejar ... Casi inmediatamente otros dos machos le siguieron. Uno de ellos arrancó una rama al pasar junto a un árbol y la blandió unos momentos en el aire antes ele arrojarla al suelo ante sí... GOODALLJ.: En la senda del hombre, Barcelona, 1986, pp. 45-6.

CAPITULO 6. TEORÍA DE LAS CATÁSTROFES Y LINGÜÍSTICA (CONT.)

Este capítulo prosigue la exposición iniciada en el capítulo anterior. Conocemos ya algunas notas que van caracterizando la lingüística entendida desde la TC. Una investigación que no está fuera de la tradición como pudiera pensarse: Platón, Aristóteles o Spinoza se encuentran en el camino que la TC pretende proseguir y formalizar; los recursos a la Física -el concepto de Resonancia- para escapar al reduccionismo mecanicista, y a la Biología -las grandes figuras de regulación metabólica-, que es la manera postdarwiniana de comprender al «hombre»; la apelación a un universo semántico configurado a partir del «verbo», centro organizador de la frase; la defensa del «naturalismo» frente al «convencionalismo» semiótico; la espacialización frente a la temporización; la reivindicación de la *analogía* -una forma de pensamiento desprestigiada por un uso abusivo y especulativo, pero de un poder explicativo inexcusable por la configuración corpórea del hombre, no reducible a un sistema formal-, saber por semejanzas ahora controlado desde la Topología.

Nos queda, entonces, exponer la formalización propuesta, estudiar los *arquetipos semánticos,* inspirados en los modelos algebraico-geo-métricos de la TC. Los principios de proyección, de aplicación de unas superficies en otras, de la posibilidad de realizar cortes en las variedades n-dimensionales, son los conceptos claves para entender la teoría.

Bien entendido lo siguiente: estos arquetipos no son culturales, sino radicales. Nos podríamos preguntar, por ejemplo: ¿Hay un arquetipo para la acción de *amar.* La respuesta ha de ser negativa si el verbo amar no puede ser considerado un universal lingüístico sino, por el contrario, una particularidad, una creación de un grupo humano, el resultado de un determinado desarrollo histórico. Supongamos, con Ortega que amares una cualidad configurada en los tiempos modernos: *"Sin discutir ahora la conexión que pueda tener con ciertos instintos cósmicos yacentes en nuestro ser, creo que el amor es todo lo contrario de un poder elemental. Casi, casi -aun a sabiendas de la parte de error que va en ello- yo diría que el amor, más que un poder elemental,* *parece un género literario. Fórmula que -naturalmente- indignará a más de un lector, antes -naturalmente- de haber meditado sobre ella. Y claro está que es excesiva e inaceptable si pretendiese ser la última, más yo no pretendo con ella sino sugerir que el amor, más que un instinto, es una creación y, aun como creación, nada primitiva en el hombre. El salvaje no la sospecha, el chino y el indio no la conocen, el griego del tiempo de Pericles apenas la entrevé..."*^. En este caso, el análisis topológico del verbo *amar* en su momento de «espaciali-zación» vendría a coincidir con el Lenguaje Ordinario, que -olvidada o vuelta caduca la cultura romántica en la que el amor se originó- ha realizado su particular transformación topológica, convirtiendo el opaco sentimiento de *amar,* en un perfectamente visualizable *hacer-el-amor.*

6.1. DEFINICIÓN DE «ARQUETIPO SEMÁNTICO»

Vamos a apoyarnos en Wildgen para establecer las características de las catástrofes elementales como *arquetipos semánticos,* puesto que Thom es muchas veces reacio a desarrollarlos, seguramente porque este campo es el que ha dado lugar a las mayores especulaciones de la TC. Las diferencias decisivas con las teorías semánticas usuales -incluidas las actanciales- se hacen más patentes en algunos momentos básicos:

i) Mientras que las estructuras «preverbales» propuestas por Tesnié-re o Fillmore son generalizaciones de la lingüística, los arquetipos semánticos sugeridos por Thom son *algebraico-topológicos* y no lingüísticos.

ii) Los fundamentos de los arquetipos semánticos se inspiran en un formalismo que se supone básico en muchos *sistemas biológicos.*

iii) Los arquetipos semánticos son *formas irreductibles,* que no admiten análisis ulterior; sólo remiten a los conceptos matemáticos constituyentes [Cap. 4]

Thom parte de un doble resultado de la investigación lingüística del *estructuralismo.* Por una parte, apela al gran descubrimiento de la lingüística estructural o formal, que mostró que la organización de una frase elemental podría ser descrita por un grafo o árbol. Lo representativo es que sólo haya unos pocos tipos de árboles necesarios para dar cuenta de las estructuras elementales. Chomsky propone Reglas Trans-formacionales, que Thom rechaza por su arbitrariedad, por la carencia de una clasificación canónica, aunque valore muy positivamente otros aspectos de la lingüística chomskiana, como la universalidad de ciertos mecanismos formales en todos los lenguajes humanos.

Por otra, sigue el criterio de Tesniére, quien caracterizó esas estructuras elementales por la *valencia* de los verbos [Cap. 5],

Cero-valente: Sin sujeto: Se *ríe.*

Uni-valente: Con sujeto, sin complemento: *Lo propio del hombre es reír.*

Bi-valente: Con sujeto y con complemento: *Sócrates riendo, bromeando, disimulando su divino saber.*

Tri-valente: Con sujeto, con objeto y con destinatario: *Gargantúa escribe sus aventuras para solaz de sus lectores.*

La clasificación thomiana de los verbos se presenta como algo más fina que la de Tesniére, de acuerdo con la clasificación de las catástrofes. Se parte de la siguiente definición:

Definición 6.1. *Los arquetipos semánticos serán los resultados de la interpretación indirecta de trayectorias en el conjunto de bifurcación de un despliegue universal (o catástrofe) elemental.*

Aplicación de las Catástrofes Elementales a la Semántica:

La estrategia de la interpretación de la TC es topológica y no formalista: en vez de construir un lenguaje formal (sintaxis) desprovisto de significado y luego definir una semántica en términos de la teoría de conjuntos, con lo que se obtiene un lenguaje interpretado[3], lo que haremos es considerar la *aplicación de los esquemas dinámicos de* *la TC:* a) en el conjunto de las estructuras lingüísticas básicas y b) en el conjunto de las estructuras cognitivas básicas. La correlación de ambas a través de la TC es lo que Thom llama *Arquetipos Semánticos,* que vendrían a ser los más elementales y, al tiempo, los más primitivos niveles de proposiciones semánticas [Fig. 6.1].

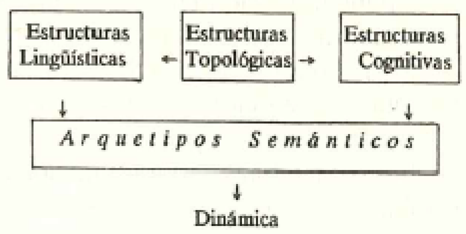


Fig. 6.1 Aplicación topológica a la Lingüística

La dificultad de esta aplicación exige, por una parte, unos *principios* que determinen la *correlación* entre la teoría matemática de la TC y, por otra, la especificación de estas correlaciones, es decir, cómo pueden interpretarse las estructuras semánticas.

A) Principios de Correlación:

Principio 1. Los atractores estables de una catástrofe elemental se interpretan como entidades *semánticas estáticas.* Sus realizaciones características son *sustantivos, adjetivos* y *términos.* En lo que concierne a las estructuras cognitivas, son interpretadas como clases «naturales» de individuos, objetos, cualidades...

Principio 2. Los accidentes dinámicos que se suceden a lo largo del conjunto de bifurcación son fundamentalmente *verbos* y *expresiones verbales* (en el sentido de Tesniére: «Los verbos gobiernan la oración»). Actúan como el centro dinámico de una forma *gestalt.* Las experiencias, los sucesos, las acciones, son los correlatos de la TC.

Principio 3. Los arquetipos semánticos son *locales* y suponen, por consiguiente, un substrato: el substrato espacio-tiempo.

B) Especificaciones:

La diferencia fundamental con la lingüística clásica de tipo algebraico es su consideración del *tiempo.* La TC reintroduce el tiempo real en la estructura, creando un modelo dinámico del lenguaje. (Evoquemos el texto fundamental que nos inspira: «el lenguaje humano es un sistema descrito por un modelo semántico de dimensión uno (el tiempo) y las creodas son las palabras»). En este ámbito distinguimos diversas maneras de llevar a efecto la interpretación:

a) Los atractores pueden ser interpretados como *entidades, objetos,...*

a1) Interpretación *localista:* Frente al cuantificador existencial lógico «∃», se dirá que un objeto existe si es estable en el espacio-tiempo.

a2) Interpretación *cualitativa:* El espacio-tiempo puede reemplazarse por un substrato más abstracto: el de las cualidades.

a3) Interpretación *fase:* Las catástrofes se entienden como cambios repentinos, transiciones de fases en el flujo de sucesos, acciones rítmicas: excitación/estado neutral...

b) Los atractores son interpretados como *agentes, actores...* Lo que cambia no es el agente, sino su relación de dominio, posesión, control, etc.

b1) Interpretación *posesión:* Un sujeto que *da, toma, tiene...* alguna cosa.

b2) Interpretación *interacción* de dominio y control: Un sujeto que *captura,* que *emite,* que se *apropia...* de algo.

b3) Interpretación *instrumental:* El uso de instrumentos (o causas indirectas) enriquece las posibilidades de interpretación, abriendo un amplio campo para las actividades sociales humanas.

* * *

NOTA: Para ilustrar las diferentes catástrofes o singularidades, se divide cada figura en dos partes: en la superior se ofrece alguna sección de la superficie-catástrofe y en la inferior el grafo de interacción semántica.

6.2 LAS CUSPOIDES

DESPLIEGUE «CERO»: LA SINGULARIDAD MORSE

Germen: $V = x^2$ (Puntos Morse). No tiene espacio externo o de control. Es estable bajo pequeñas deformaciones y ningún proceso-tipo puede ser derivado de este despliegue. Esquematiza *estados.*

Hermenéutica semántica:

a) La semántica de términos no contables -*oro, agua...*- caracterizados porque pueden ser divididos sin cambiar su identidad.

b) Procesos continuos sin accidentes. Podemos parametrizar el germen, por ejemplo añadiéndole a. Entonces obtenemos la figura de la figura 6.2 Es el arquetipo de un *proceso continuo,* expansivo, sin accidentes.

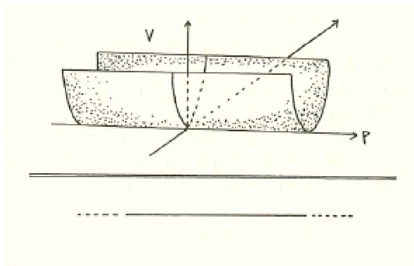


Fig. 6.2 Singularidad Morse

Especificaciones:

A1) *Ser, existir, vivir, estar...* en un dominio ilimitado. B1) *Persistir,* en el sentido de cualidades inalienables que constituyen la identidad de un objeto.

B1) *Tener, poseer* un objeto de manera estable. B2) *Estar situado en...*

La manera más simple de representar un estado es un verbo impersonal (Cero-valente, i.e., sin sujeto, en la terminología de Tesniére). Como no tiene espacio externo o de control, el verbo por antonomasia de este *logos* es el verbo *ser,* precisamente, y paradójicamente, porque no es un verbo, sino la base de la predicación. Es un verbo «fijo» o «petrificado», como quiere Petitot. En el siguiente espléndido texto de Gabriel Miró[4] se está usando y explicitando, a la vez, el sentido del verbo *ser.*

"Ahora me parece que somos menos humanamente la persona que nos corresponde ser, y más que nada somos: yo, el hacendado don jesús; otro, presidente de Sala; otros, catedráticos, o militares, o mercaderes... Pues ese extranjero es principalmente humano y se conmueve y debe sentirse humano lo mismo que un pájaro se siente ave".

DESPLIEGUE «UNO»: EL PLIEGUE

Germen: $V = x^3$

Despliegue: $V(a;x) = x^3 + ax$

De codimensión 1. Es el primer sistema dinámico inestable bajo pequeñas deformaciones.

Hermenéutica semántica:

a) La semántica de los procesos de aparición o desaparición súbita. Como los parámetros son el espacio y el tiempo, se admiten las dos interpretaciones: desde un punto de vista espacial, la catástrofe «pliegue» simboliza la *frontera* y los *extremos;* desde un punto de vista temporal, *comenzar* algo y *finalizarlo.* Al considerar la variable externa *p,* se añade una segunda dimensión al conjunto de bifurcación: la línea se convierte en una superficie y el punto de bifurcación en una línea-frontera.

b) Es el arquetipo del *nacimiento / muerte.* Y también el arquetipo de las *fronteras,* de los *bordes.* Define las situaciones en que una corriente se *canaliza,* de manera que ya no se extiende ilimitadamente, dando lugar al nacimiento de cilindros, de conducciones, de cauces [Fig.5.7].

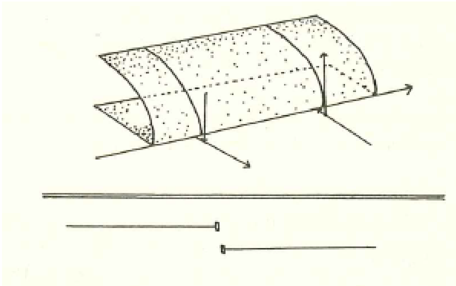


Fig. 6.3 Singularidad «Pliegue»

Especificaciones:

a1) *Entrar, salir, abandonar..*

a_2) Perder una cualidad estable: *casarse, morir...* (No hay gradación en el paso de un estado a otro).

a3) *Nacer/ Morir;*

Ir al Marcharse;

Llegar a / *Salir* o *Arrancar;*

Alargar / Dejar.

b1) *Perder/ Encontrar.*

b2) Aparecer / Desaparecer

Comenzar / Terminar.

Se expresa mediante verbos neutros (uni-valentes, con sujeto pero sin complemento). Este arquetipo es asimétrico [Cap. 1]; contiene dos estados que son contradictorios: estabilidad o existencia e inestabilidad o no-existencia. Es, por tanto, la base de la *negación,* irreductible a su conceptualización lógica [Cap 7]. V. gr. en el siguiente texto los verbos *emerger* y *aparecer* suponen dos dominios, uno en el que no existe el objeto y otro en el que ya existe. Esa transformación está provocada por un parámetro en cada caso: «hacer caer los cabellos» y «desbordarse la nieve»:

"Su barba de profeta, sus cabellos nobilísimos cayeron lentamente en espesos toisones, y fue ***emergiendo*** *un cráneo reducido, como* ***aparece*** *un peñón al desbordarse la nieve* ***que*** *lo agrandaba con blancas turgencias".*

DESPLIEGUE «DOS»: LA CÚSPIDE

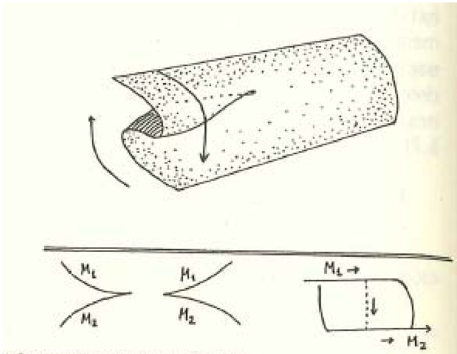


Fig. 6.4 Singularidad «Cúspide»

Germen: $V = x^4$ Despliegue: $^{V}(a,b;x)$ = $X^{4\ +\ ax2\ +}$ bx

Como la «dimensión es 2, existen caminos diferentes para cruzar su espacio de control. Comprende catástrofes de conflicto -que dan lugar a grafos físicos y los mínimos se interpre- tan como *estados*- y de bifurcación -que dan lugar a grafos biológicos y se interpretan como *actuantes*-.

Hermenéutica semántica

a) Espacialmente: los frunces y las fallas; temporalmente: la unión y la divergencia, la generación y la destrucción.

b) Es el arquetipo de las ideas semánticas de *reunión* y *separación* y también de la *flecha del tiempo;* es el proceso típico de la *¡reversibilidad,* de la imposibilidad del paso del número ordinal 2 al número ordinal 1. La existencia de los agentes (o atractores) es asimétrica; uno de ellos es el dominante y el otro el dominado, por lo que hay conflicto de atractores [Fig. 6.4].

Especificaciones

A1) Cambio de lugar: El actuante se *mueve, camina, conduce, viaja,* etc. de un lugar a otro, de M1 a M_2.

A_2) Se pasa de un estado cualitativo a otro. Un actuante M1 pasa de un estado a otro estado M_2 Por tanto, hay una organización bipolar cualitativa en el cambio.

Vigilia / Sueño Bueno / Malo *Fuerte / Débil*

Grande / Pequeño *Activo / Pasivo* *Nervioso / Calmo.*

A_3) Cambios en las actividades ejercidas:

Descanso / Tensión *Guerra / Paz*

Ataque / Huida *Gas / Líquido.*

B1) No tiene en cuenta ni el objeto que cambia ni el intermediario que permite el cambio, pues este arquetipo sólo posee dos atractores: *dar, entregar, recibir...*

B2) Si se considera el lazo alrededor del centro organizador, se obtiene el fenómeno de la confusión y sustitución de los actuantes. Ésta es la interpretación más usual en Thom, fundamental en biología: es el arquetipo de la *Captura /Emisión,* «El gato caza al ratón» [Cap. 5 y Fig. 5.6].

B3) A veces tiene un carácter repetitivo, cíclico y se convierte en el arquetipo del golpear-rítmico: la *marcha,* la *carrera,* la *danza...* y, como caso límite, el *diapasón.*

B4) *Alargar/ Tender* (con el arma, con el instrumento). Este arquetipo expresa tres hechos básicos: Hay un agente $A4_1$ estable, que no es destruido y corresponde al despliegue «cero». En un punto K_1 o K_2 de la figura 5.8 se aniquila (o crea) otro atractor M_2 y corresponde al despliegue «uno». Estos dos procesos están vinculados por mediación del despliegue «dos» o catástrofe *cúspide:* un atractor pierde (o gana) sus capacidades, mientras que el otro se mantiene estable.

Se expresa mediante la frase transitiva clásica: Sujeto-Verbo-Objeto, *SVO.* El sujeto es el actuante que sobrevive a la catástrofe y triunfa. El objeto sufre la catástrofe y puede llegar a perecer (o viceversa). Estos verbos bivalentes compuestos de sujeto más complemento directo, del tipo: *poseer, capturar...* comportan la identidad entre el sujeto y el objeto. Se requiere, entonces, de otra catástrofe que compense el resultado de la posesión, de la captura que hace confundir los dos actuantes y vuelva a reintegrar al sujeto de la catástrofe a su punto originario como predador y no como presa. De lo contrario, quedaría anulada su personalidad (local), quedaría alienado. Toda una teoría de lo *imaginario* puede iniciarse aquí: las «presas», los objetos «perseguidos», ¿son reales? Los objetos reales, ¿suplen los «ensueños»? etc. (Dejémoslo para mejores observadores del psiquismo). En el siguiente texto, el incumplimiento de la «identidad» requerida por el verbo compromete la estabilidad del sujeto. La *cúspide* permite comprender, entonces, fenómenos psicoanalíticos como los de «frustración», «compensación», etc.:

"Toda hermosa, pero de una hermosura apasionada y nueva; un principio de plenitud de mujer que se afirmaría y existiría muchos años más, cuando él fuese alejándose por los resecos caminos cíe la senectud. Nunca había poseído ese cuerpo de mujer en su mujer. Y la miraba con rencor amándola como si Paulina perteneciese a

*otro hombre. Se inclinaba todo él a la caricia desconocida y brava. Y otro don Alvaro huesudo y lívido le sacudió con su grito llamando al médico"**

DESPLIEGUE «TRES»: LA COLA DE MILANO

Germen: $V = x^5$

Despliegue: $^{V}(a,b,c;x)\ x^5+ax^3+bx^2+cx$

Su codimensión es 3. Combina las características del *pliegue* y la *cúspide.*

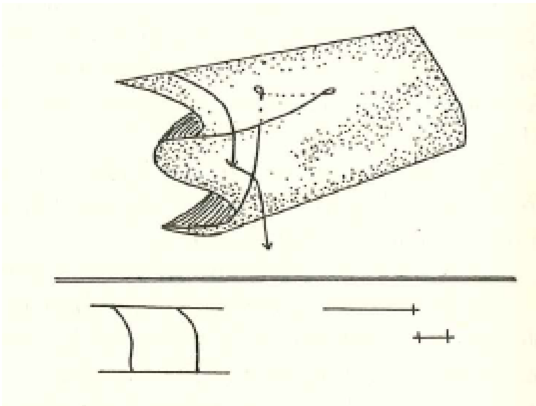


Fig. 6.5 Cola de Milano

Hermenéutica semántica

a) Las singularidades risicas tienen que ver con un régimen condenado a desaparecer pero antes de que eso ocurra salta a otro régimen metaestable, que también desaparece. Espacialmente puede interpretarse como la acción de emitir algo que desaparece: las irisaciones, los destellos; temporalmente, como la acción de *rasgar, aserrar...*

b) Es el arquetipo del *casi,* del *estar a punto de algo.* En biología se ejemplifica con el «suicidio», algo que se autodestruye: «El samurai se hizo el *hara-kiri».* En sociología, con el «¡uy!» que gritan los miles de espectadores de un partido de fútbol cuando su equipo está a punto de marcar un gol. Ortega hace un comentario delicioso sobre el «casi»: *"El giro popular español que habla de «tomar el rábano por las hojas»* *parece la definición de la diplomacia. Estos hombres de la* carriére *son el universal* casi. *Son casi elegantes, casi aristócratas, casi funcionarios, casi inteligentes y casi donjuanes. Pero el* casi es *el vocablo de la ausencia".* [Fig. 6.5].

Especificaciones

Las acciones de *golpear, hendir.* En los seres humanos –según Thom- este arquetipo debió de especializarse seguramente en el empleo de una herramienta a modo de maza. Con ella intentarían hendir el cráneo del adversario provocando una catástrofe (de tipo «cola de milano»), lo que exige que el arma tenga una forma típica, biselada[10].

Los caminos transversales en la «cola de milano» son ya muy complejos. Así que puede ocurrir que la trayectoria corte o no los planos de la singularidad. Al destacar el verbo *estar a punto de,* por ejemplo, estamos privilegiando uno de sus caminos transversales, quizá porque sea el más significativo. En la figura 6.6 se muestra el motivo de la elección de los símbolos de la parte inferior de la figura 6.5. Responden a los distintos caminos que atraviesan el espacio de control de la «cola de milano».

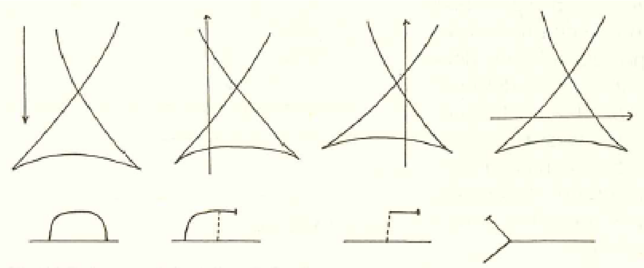


Fig. 6.6 Grafos gramaticales de la «cola de milano»

Así en a) el actuante *M1* aparece, emite M_2 y *M1* lo vuelve a recoger, pero sin cruzar la línea de conflicto.

En b) el agente M1, antes de desaparecer, emite M_2, que desaparece antes que M1.

En c) un actuante M, emite un segundo actante M_2. Éste captura al emisor *M1* y desaparece con él. Ahí está explicado el agudo refrán: «Cría cuervos y te arrancarán los ojos»

En d) Un actuante desaparece, etc.

El siguiente texto de Miró describe los fenómenos de la «ausencia» a los que se refería Ortega. El actuante *M1* emite el actuante M2 -no más que una fantasía- que desaparece inmediatamente arrastrando al emisor imaginativo con él, volviendo a la situación inicial:

"Las miraban pasmadamente las damas y vírgenes de Oleza, obligadas a un esfuerzo y pesadumbre de vestidos brochados, de cuelgas de alhajas, de rigideces de lienzos interiores, de cinturas retorcidas y pechos retrocedidos entre el cañaveral de las ballenas. En cambio, de las forasteras se exhalaba la alegría de sus cuerpos con tanta gloria que casi se creía que fueran a brotar desnudas como de un baño. -¡Atiende! ¡Vienen de trapillo; pensándose que aquí no se viste!".

DESPLIEGUE «CUATRO»: LA MARIPOSA

Germen: $V = x^6$

Despliegue: $V(a,b,c,d;x) = x^6+ax^4+bx^3+cx^2+dx$

Como es de codi-mensión 4, el conjunto de bifurcación es tetradimensional y no se pueden representar sino secciones de él (por ejemplo, en diferentes planos del tipo: *(a,b),* (b,c)...) La sección más rica que podemos realizar tiene cinco atractores, tres mínimos y dos máximos.

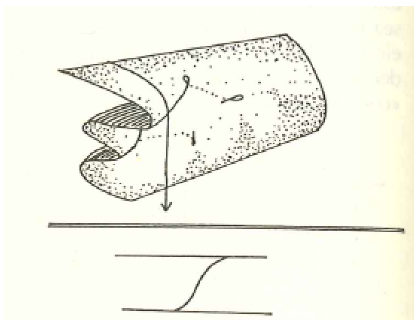


Fig. 6.7 Mariposa

Hermenéutica semántica

a) La semántica de la acción de *donar algo a alguien;* el desplazamiento: *ir de un sitio a otro* por mediación de algo, al modo de la clásica morfología: Fuente-Mensajero-Receptor. La interpretación espacial tiene la estructura de un recipiente que se llena con algún objeto: el bolsillo, la bolsa, el saco. Temporalmente: el *don,* la *recepción.*

b) Es el arquetipo del *compromiso,* de la *transferencia,* del *paso a un efecto por mediación de algo* [Fig. 6.7].

Especificaciones

A1) *Ir de* un sitio a otro pasando por un tercero.

A2) La transformación cualitativa mediante una estación:

joven - Maduro - Anciano

Bueno - Indiferente - Malo

Verdadero - Indefinido - Falso 83) El paso se puede realizar por mediación de zonas diferentes: El cielo *se oscurece* y se *torna* negro.

Esta transición puede tener dos direcciones, con cambio del mediador. Obsérvese, en todo caso, que las zonas de compromiso-armisticio o movilización- no son equivalentes en un sentido o en otro:

M1	*M2*	M3
guerra →	→armisticio →	→paz
guerra ←	←movilización ←	←paz

B1) Ésta es una interpretación central en Thom. Combina el arquetipo de Emisión con el de Captura, convirtiéndose así en el arquetipo de *Transferencia.* Por ejemplo: «Eva *da* una manzana a Adán».

B2) Es el arquetipo de la *acción indirecta.* El segundo actuante o agente no sería sino un medio auxiliar. Creemos que no se le ha sacado todo su partido al asociarlo con la «mitad» del famoso pasaje de Hegel del «amo y el esclavo». *M-* y M_3 son agentes copresentes, pero *Mj* es considerado como auxiliar.

B3) Se expresa por verbos tri-valentes (que poseen Sujeto, Objeto y Destinatario). V. gr.: «El granjero golpea a su jumento con un garrote».

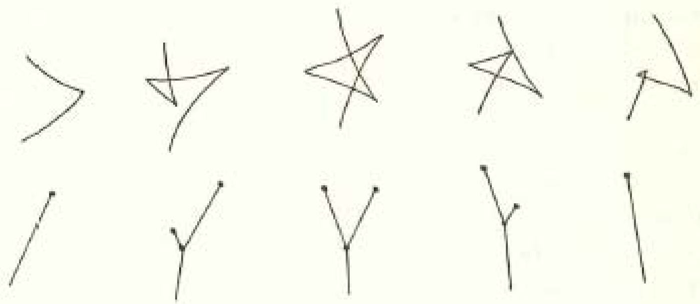


Fig. 6.8 Grafos gramaticales de la «mariposa»

Como en el caso anterior, los gratos dependerán de los caminos recorridos [Fig. 6.8].

En el texto de Miró que nos servirá de guía y ejemplo se describe el verbo *dar en* un ciclo completo *dar / devolver.* M1 da algo a *M2,* a través de un mediador, que es la «ceremonia». Este intermediario explica la complejidad de la *mariposa* respecto de la *cúspide,* cuya realización es inmediata. Cuando la *mariposa* es fallida y falta el intermediario, lo que desaparece es toda la estructura social M_2 que sostiene el intercambio, y la acción de *darse* empobrece hasta desaparecer ella misma. El círculo completo del *don,* exige su inversión; cuando esto no ocurre, la inestabilidad alcanza su límite y desaparece el proceso:

"A él acudíamos por dinero para ir a segar arroz en la Albufera. Con veinte reales nos bastaba para el camino, y se los pedíamos a él. «¿Quieres un duro?» -decía- . «¿Un duro? Aguarda que lo busque». Y encendía el velón de cuatro Humeras, abría el escritorio, y del fondo sacaba el cartucho de veinte reales y nos lo daba con mucha ceremonia. Con la misma lo recibía, lo contaba y guardaba cuando se lo devolvíamos recién llegados del arrozal». Pero una vez no pude yo traérselo, y a la otra siega le pedí otro duro (...) ¡No está, no está el duro que me pides! ¿Es que no me lo devolverías cuando llegaste de la Albufera y por eso no estará. «Y ya nunca me lo dio»".[u]

6.3. LAS UMBÍLICAS

DESPLIEGUE «CINCO»: UMBÍLICA HIPERBÓLICA

Germen: $V = x^2y + y^3$

Despliegue: $V(_{a,b,c;x,y}) = x^2y - y^3 + a(y^2+x^2) + bx + cy$

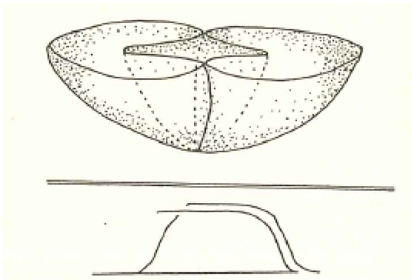


Fig. 6.9 U. Hiperbólica

Hermenéutica semántica

a) Es la semántica de los estados de relajamiento; del sexo femenino[14]. La interpretación espacial simboliza la cresta de la ola, la bóveda, el receptáculo; la temporal: *recubrir, hundirse* (pero abriendo un hueco).

b) Es el arquetipo [5.12].

Especificaciones

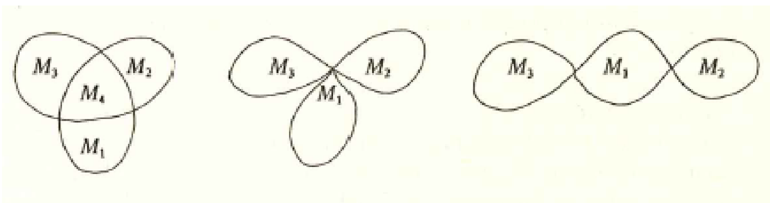
Hay tres actuantes: un Sujeto, un Objeto y un Instrumento.

Estos dos forman un complejo metaestable, que al aproximarse al Sujeto se deshace y el Sujeto captura al Objeto: la acción de atraer hacia si algo y quedárselo, de ponerse o colocarse un Objeto como el sombrero, la capa o los guantes.

a) "Copas y fruteros de alabastro con hojas de rosas y flores de espliegos. Su madre, siempre que pasaba, hundía la punta de sus dedos como en una pila sagrada; y sus vestidos y el aire se llenaban de un olor antiguo de huerto y de colina".

b) "Había braseritos, vidrios catalanes, cuencos y platos de Alcora, llenos de rosas deshojadas. Pablo y Máximo sumergían sus manos en la frescura viejecita y sacaban entre sus dedos un olor muerto de jardines desaparecidos"/[5]

Son dos textos análogos. Fijémonos en a). La madre, el actuante M1 hunde los dedos (una emanación del sujeto) *M3* en el frutero *M4* y separa el olor M4, que se expande por entre los vestidos de M1. El Objeto (el olor *M2)* y el Instrumento (los dedos *M3)* forman una totalidad inestable, de tal manera que cuando la madre *M1* se aproxima con sus dedos *M3,* el conjunto que forman copas y fruteros y rosas y espliegos, se deshace y el Sujeto *M1* captura el Objeto M_2 (el olor).



DESPLIEGUE «SEIS»: UMBÍLICA ELÍPTICA

Germen: $V = x^3 - xy^2$

Despliegue: $V_{(a,b,c;x,y)} = x^2Y + Y^3 + a(Y^2 - x^2) + bx + cy$

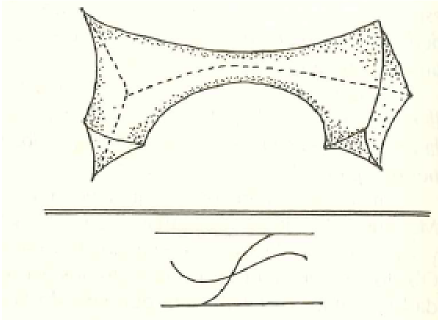


Fig. 6.8 U. Elíptica

Hermenéutica semántica

a) La semántica de los estados de tensión; del sexo masculino· La interpretación espacial queda simbolizada por los objetos estilizados y agresivos: aguja, puya, pelo; la interpretación temporal: el rompimiento en punta, la perforación, el pinchazo...

b) Es el arquetipo del *mensajero indirecto* y de la acción de *penetrar* [Fig. 5.11].

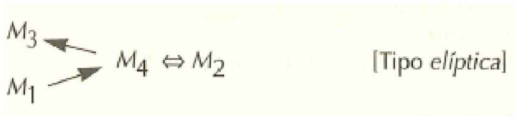
Especificaciones

Trayectorias del arquetipo del *mensajero:* Se parte de cuatro actuantes, el Sujeto *M4* que emite un Mensaje M_4 a través de un Mensajero M_2 a un Destinatario M3. El Mensajero va junto al Sujeto, que se escinde, emitiendo un actuante que es capturado por el propio Mensajero; pero el estado conseguido es metaestable, por lo que el Mensajero se dirige al Destinatario, que captura al actuante-Mensaje y libera al Mensajero, que ya puede alejarse. Más formalmente: *M1* emite M_4; el atractor M_2 lleva, conduce o transporta al atractor *M4,* que es encerrado por M_3; el atractor M_4 es tomado por M_3 y M_4 desaparece en el campo de M_3, dejando libre a M_2. O, en un caso más radical, el mensaje M_4 puede tener por objeto *destruir* al destinatario M_3, como el caso de un proyectil M_4 que se lanza a otro a través de un arma M_2; al recibir el proyectil, M_3 queda herido o destruido.

La trayectoria del arquetipo *penetrarse* entenderá como el proceso en el que un actuante M_1 crea un atractor M_2, que desaparece en el atractor M_3, ayudado por otro actuante M_4, que ni emite ni toma al atractor M_4, solamente ayuda a que M_4 pueda alcanzar M_3 desde *M1*. Puede comprobarse, entonces, cómo la estructura global de la umbílica elípticas incorpora otros arquetipos. Este proceso puede entenderse así: el emisor M1, quiere llegar a M_3:

- Mas, por la dificultad de acceder a él de manera inmediata *(cúspides)* ha de establecer una conexión con mediadores. La razón puede encontrarse en la resistencia de materiales, en la lejanía entre actuantes, en la poca afinidad ideológica, etc. Se requiere, por lo tanto, de un intermediario; por ejemplo, de un mensajero M4,

- Pero este intermediario, este mensajero no puede realizar esta acción si no es con ayuda de un instrumento que le socorra



Veamos un texto de Miró donde se describe una acción que se deja interpretar de este modo:

"Un jornalero vio descolgarse a la cuadrilla en su refugio, y montó en un mulo que le derribó de un bote, y él, recobrándolo, se le agarró a la piel y a la crin y lo aguijaba rajándole el lomo con la punta de su navaja; el macho pateaba y relinchaba de dolor, galopando por las veredas, encima de los derrumbaderos; así corrió para dar el aviso".

En el texto dominado por el verbo *aguijar,* del tipo semántico de *penetrar,* el jornalero *M1* envía un mensaje M4 al mulo M3 por medio de un instrumento, M_2, que es la navaja que penetra en M_3. Lo que, a primera vista podría parecer casi un absurdo, ha de ser bien familiar para cualquier asiduo televidente de películas «americanas». El pistolero, el policía, el Rambo de turno, envían mensajes a través de un instrumento: pistola, ametralladora, puñal. *«Y llevo pistola al cinto / y con ella doy consejos»* cantaba alardeando Jorge Negrete.

DESPLIEGUE «SIETE»: UMBÍLICA PARABÓLICA

Germen: $V= x^2y+ y^4$

Despliegue: $V_{(a,b,c,d;x,y)} = x^2y + y^4 + ax + by + ex^2 + dy^2$

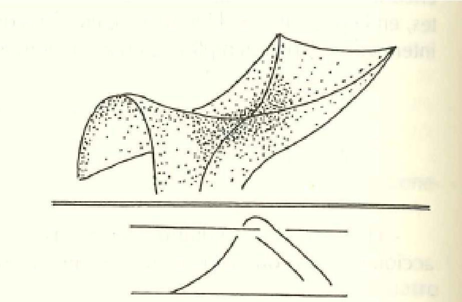


Fig. 6.10 U. Parabólica

Hermenéutica semántica

a) Es la semántica más compleja. Espacialmente: chorro, boca... Temporalmente: brotar un chorro, abrir y cerrar, horadar, cortar, pellizcar, tomar, arrojar...

b) Arquetipo de la *escisión,* de la *reproducción sexual,* de la *comparación,* que es una clase de conflicto cualitativo artificialmente provocado entre dos objetos.

Especificaciones

Un actuante M1, el sujeto, con ayuda de un instrumento M3, provoca una escisión en el otro actuante, el objeto *M1,* que se parte en dos, *M1* y M4. Esta parte escindida es capturada por el instrumento M3. Esta morfología es muy rica y muy común en el mundo. Así los verbos: *Cortar, resolver, dilucidar, zanjar, desgarrar, arrancar, cavar, horadar...* La acción de cortar en trozos antes de comer es el ejemplo más significativo de esta singularidad. Un precioso ejemplo de parabólica es el siguiente pasaje de *Gargantúa: "Entonces, de un solo golpe, le tajó la cabeza,* **cortándole** *el cráneo por encima de los huesos petrosos, y arrancándole los dos huesos bregmáticos y la comisura sagital con gran parte del hueso coronal, haciendo lo cual le* **cortó** *las dos meninges y abrió profundamente los dos ventrículos posteriores del cerebro; y quedó el cráneo colgando de los hombros por la piel del pericráneo, por detrás, como un bonete doctoral, negro por encima, rojo por dentro. Así cayó tieso al suelo, muerto"*

En el capítulo 4 se señaló que la *umbílica parabólica* contiene jerárquicamente a todas las demás singularidades y que las *umbílicas hiperbólica* y *elíptica* eran «deformaciones topológicas» suyas. Esto nos da pie para sospechar que el arquetipo «umbílica parabólica» puede aparecer desplegado en estos arquetipos. No queremos aún echar las campanas al vuelo, pero nos parece ver aquí mucho más que la relación masculino/femenino mencionada por Thom y que hemos citado en la nota 13: veríamos el modelo genérico de la Teoría de los Opuestos. Por ahora sólo daremos un ejemplo de cómo aparece en el lenguaje ordinario esta conexión. En el texto de Miró que a continuación citamos, el arquetipo *umbílica parabólica -mondar-* se especifica mediante dos verbos: uno perteneciente al arquetipo *umbílica elíptica -clavar-* y otro perteneciente al arquetipo *umbílica hiperbólica -remover-*.

"¿No estuvieron juntos en la facción? Y él confesó que lo creía muerto. Si al que le rajó la mejilla se le hubiese ocurrido remover la lanza después de clavársela, le habría ido mondando por dentro la frente, los ojos, la nariz, el paladar. Y mientras eso decía, rodaba don Alvaro su puño".

EJERCICIOS

Trozos de escritura se desgajan de su contexto y se exhiben perfectamente vivos aun separados del texto que los acogiera en el origen. Independientes, autosuficientes, autónomos, caminan como si hubieran sido escritos *ex profeso* para sí mismos: los aforismos se confunden muchas veces con ellos. Esos trozos, ¿no responderán, acaso, a los arquetipos semánticos que hemos tratado? Se propone encontrar la correlación entre los textos aquí elegidos y los arquetipos definidos en este capítulo.

1) ¿Qué arquetipo rige en los siguientes textos? Dibujar el grafo explicativo:

a) "Porque el principio primordial de movimiento no es la propia esfera y el propio continente, sino el apetito de conservarse... El principio impulsivo intrínseco no procede de la relación que tenga con un lugar determinado, con un cierto punto y con la propia esfera, sino del impulso natural a buscar donde mejor y más rápidamente se mantenga y conservase en el ser presente, lo cual (por muy innoble que sea) desean todas las cosas de forma natural". BRUNO: Infinito, Madrid, p. 483.

b) "Y ahora los espectros de Marx. (Pero ahora sin coyuntura. Un ahora desquiciado, disyunto o desajustado, out of joint, un ahora dislocado que corre en todo momento el riesgo de no mantener nada unido en la conjunción asegurada de algún contexto cuyos bordes todavía serían determinables.) DERRIDAJ.: Espectros de Marx, Barcelona, 1995, p. 17.

c) "Ocurre pensar que el infinito por adición no parece ser de tal calidad que supere toda magnitud posible, y que sí lo sea, en cambio, por división, pues igual que la materia queda intrínsecamente compre-hendida, de igual manera también el infinito, mientras que la forma es lo que comprehende". ARISTÓTELES: Física, III, 207 a.

d) "Un doble relato te voy a contar: en un tiempo todas las cosas llegaron de una pluralidad a constituirse en unidad, y en otro pasaron de unas a ser múltiples: dúplice es la génesis de los seres mortales y doble su destrucción. A la una la engendra y la destruye su reunión, y la otra crece y se disipa a medida que los seres se dividen de nuevo". EMPÉDOCLES: Fr. 17. 1-5.

e) "El tiempo -cifra de la transformación- es, en su concepto, extático, salida de, más bien que llegada a. Tiempo es medida contemplada bajo el ángulo de la *corrupción, no de la eventual nueva síntesis a partir de los hechos". GÓMEZ PIN,V.: Filosofía, Barcelona, 1989, p. 213.*

f) "Porque el hombre siente el amor primariamente como un violento afán de ser amado, al paso que para la mujer lo primario es sentir el propio amor, la cálida fluencia que de su ser irradia hacia el amado y la impulsa hacia él. La necesidad de ser amada es sentida por ella sólo como una consecuencia y secundariamente. La mujer normal, no se olvide, es lo contrario de la fiera, la cual se lanza sobre la presa; ella es la presa que se lanza sobre la fiera". ORTEGA: O.C., t. 2, p. 363.

g) "Ergo, la traición de judas no fue casual; fue un hecho prefijado que tiene su lugar misterioso en la economía de la redención. Prosigue Runeberg: El Verbo, cuando fue hecho carne, pasó de la ubicuidad al espacio, de la eternidad a la historia, de la dicha sin límites a la mutación y a la muerte; para corresponder a tal sacrificio, era necesario que un hombre, en representación de todos los hombres hiciera un sacrificio condigno. Judas Iscariote fue ese hombre, judas, único entre los apóstoles, intuyó la secreta divinidad y el terrible propósito de jesús. El Verbo se había rebajado a mortal; Judas, discípulo del Verbo, podía rebajarse a delator (el peor delito que la infamia soporta) y a ser huésped del fuego que no se apaga. El orden inferior es un espejo del orden superior, ¡as formas de la tierra corresponden a las formas del cielo; las manchas de la piel son un mapa de las incorruptibles constelaciones; Judas refleja de algún modo a Jesús. De ahí los treinta dineros y el beso; de ahí la muerte voluntaria, para merecer aún más la Reprobación." BORGESJ.L: Ficciones, Madrid, 1978, p. 177.

h) En su mensaje final sobre el Estado de la Unión, el presidente Truman declaró que «la guerra del futuro sería una guerra en la que el hombre podría aniquilar millones de vidas de golpe, borrar las conquistas culturales del pasado y destruir la estructura misma de la civilización». «Tal guerra no es una política posible para hombres racionales», añadió Truman. Sin embargo, los cinco presidentes que le sucedieron en el cargo consideraron aconsejable amenazar a la Unión Soviética con el uso de armas nucleares. Como observó el físico británico P.M.S. Blackett: «Una vez que una nación confía su seguridad a un arma absoluta, se hace emocionalmente *esencial creer en un enemigo absoluto»". FERRYJh.: La aventura del universo, Barcelona, 1990, p. 205.*

i) "Y, asimismo, el señor se relaciona con la cosa de un modo mediato, por medio del siervo; el siervo, como autoconciencia en general, se relaciona también de un modo negativo con la cosa y la supera; pero, al mismo tiempo, la cosa es para él algo independiente, por lo cual no puede consumar su destrucción por medio de su negación sino que se limita a transformarla. Por el contrario, a través de esta mediación la relación inmediata se convierte, para el señor, en la pura negación de la misma o en el goce, lo que la apetencia no lograra lo logra él: acabar con aquello y encontrara satisfacción en el goce. La apetencia no podía lograr esto a causa de la independencia de la cosa; en cambio, el señor, que ha intercalado al siervo entre la cosa y él, no hace con ello más que unirse a la dependencia de la cosa y gozarla puramente; pero abandona el lado de la independencia de la cosa al siervo, que la transforma". HEGEL: Fenomenología del espíritu, México, p. 118.

j) "Así que Zeus, temiendo que fuera a perecer toda nuestra raza, envía a Hermes a llevar a los hombres el sentido moral y la justicia, para que hubiera en las ciudades ordenamientos y pactos convencionales de amistad. Le pregunta entonces Hermes a Zeus de qué manera les daría el sentido moral y la justicia a los humanos: "¿Acaso al modo como están repartidas las técnicas, así también reparto estos dones? Están repartidas de este modo: con que uno solo domine la medicina vale para muchos profanos, y lo mismo los otros profesionales. ¿También el sentido de la justicia y de lo moral lo infundo así entre los hombres, o lo distribuyo entre todos?"

"Entre todos -dijo Zeus-, y que todos participen. Pues no existirían las ciudades si participaran sólo unos pocos de entre ellos, como sucede en los otros saberes técnicos. Incluso, sí, dales de mi parte una ley: que al que no sea capaz de participar de la moralidad y la justicia le maten como a una enfermedad de la ciudad". PLATÓN: Protágoras, 320 c- 323 a.

k) "La afirmación básica del filósofo como tal es la siguiente: En la medida en que el yo es sólo para sí mismo, surge para él, al propio tiempo y necesariamente, un *ser fuera de él. El fundamento de este último radica en el primero, el último se halla condicionado por el primero: la conciencia de sí y la conciencia de algo que no sea nosotros mismos tienen una conexión necesaria; pero la primera ha de considerarse como lo condicionante y la segunda como lo condicionado". FICHTE: Introducciones a la doctrina de la ciencia, Madrid, 1987, p. 44.*

I) Cortada por la flecha añjalika, la cabeza cayó hacia delante, después el cuerpo se desplomó... Como el sol en medio de un cielo de otoño, la cabeza cayó al suelo delante del ejército como, de la montaña de poniente, el rojizo sol (...) La cabeza cortada de Karna brillaba, como el globo del sol cuando se pone (...) El sol de Karna fue conducido a su ocaso por el poderoso Destino ejecutado por Arjuna (...) La cabeza de Karna cayó sobre la tierra como el astro de los mil rayos al declinar el día...". Mahabharata, 90, 4800-4817.

CAPITULO 7. LA SEMÁNTICA DE LOS VERBOS: CUSPOIDES Y UMBÍLICAS

Este capítulo quiere ejemplificar la teoría lingüística mediante textos concretos que, por razones de estrategia, serán fundamentalmente poéticos. En el cuento, en la novela, en el ensayo... las partes integrantes suelen estar interrelacionadas de manera muy compleja; la poesía, por el contrario, tiende a condensar, a hacer más compactos los pensamientos, los sentimientos, los deseos.... Los verbos del poema, se utilizan -ex *hippothesis*- de modo más radical que en la prosa. Ante este tipo de «hechos» -hechos lingüísticos- una teoría lingüística ha de tener capacidad no sólo para *ordenarlos* y *clasificarlos,* sino también para *contrastarlos.* Es legítima la pregunta de si los verbos, los nombres, los adverbios... empleados en el habla o en la escritura *(performance)* corresponden a lo explicitado por el modelo teórico o, si por el contrario, la interpretación topológica es una pura y simple especulación. Más concretamente, se habrá de elegir entre los cuernos del siguiente dilema: O bien la TC posee capacidad para constituirse en una teoría del lenguaje, o bien, como suponen sus críticos, se reduce a una aplicación muy empobrecida de algunas singularidades. Así Bunge desprecia el *"empleo repetido y casi exclusivo de un único modelo para representar (sin explicar) multitud de procesos diferentes, a saber, la «catástrofe cuspidal»"*\ Del mismo modo, Arnold: *"Felizmente, los bellos resultados de la teoría de las singularidades no dependen del oscuro misticismo de la teoría de catástrofes".* Y ¡sorprendentemente! añade: *"Pero en la teoría de la singularidad, como en todas las matemáticas, hay un elemento misterioso: las sorprendentes coincidencias y uniones entre objetos y teorías que a primera vista parecen lejanos".* Convendría explicar el milagro. Thom, en cualquier caso, conoce muy bien cuáles son los límites del modelo: *"En mi opinión, existen pocos ejemplos de una utilización pertinente de la metodología de la teoría de las catástrofes. El mejor uso que se puede hacer de ella, según mi parecer, consiste de hecho en el hallazgo de parámetros pertinentes".*

Se defenderá aquí la capacidad de la TC para dar cuenta, no del lenguaje como un *todo,* sino de *algunos* momentos lingüísticos. El criterio semántico que hemos propuesto -la jerarquización de los verbos, corolario del Teorema de Limitación Semántica- deberá ser corroborado tras un recorrido exhaustivo, recorrido que ahora iniciamos. Se intuyen algunos resultados espectaculares, como el siguiente: la tendencia no tanto a que el lenguaje se *corrompa* como a que se *trivialice* muy rápidamente, esto es, se incline hacia contenidos muy vulgares: *entrar, salir, meter, sacar,* etc. (que corresponden, justamente, a verbos de tipo *cúspide).* No se puede estar siempre sublime, como ya sabía Aristóteles. Por ejemplo, los términos sobre la sexualidad, la guerra, el juego... aparecen sin solución de continuidad en todas las generaciones, por muchos esfuerzos que realicen las iglesias, los ascetismos o las pedagogías para *elevar* el nivel «cultural» de las gentes. Todos estamos a la par. Las élites - *"«Hasta donde alcanza mi memoria, sólo he pensado en eso» confiaba, en las puertas de la muerte, un filósofo contemporáneo conocido por la austeridad de sus costumbres"* recuerda Jean-Didier Vincent como ejemplo de la obsesión por el sexo¯ y el pueblo -*"Freud prosigue diciendo que la palabra* Herr *y las reminiscencias sobre las costumbres turcas que un colega suyo le había descrito le llevó a recordar la exasperación de la sexualidad que les caracteriza, y cómo resignados ante el destino, la menor dificultad para el goce erótico les subleva y les impele al suicidio. Un paciente de su colega había dicho a éste:* «Herr, *¿tú sabes? Si esto se acaba, la vida no tiene valor»"* cuenta Ortega de los turcos en Alemania-.

7.1. LA JERARQUIZACIÓN TOPOLÓGICA DE LAS MORFOLOGÍAS SEMÁNTICAS

Por una parte, esta *hermenéutica semántica* de los Universales Semánticos -y por propia coherencia epistemológica según los cánones de la TC- no puede ser verificada o refutada según los criterios clásicos del verificacionismo (Hempel) o del falsacionismo (Popper). Thom, desde una posición beligerante antirreduccionista, considera la TC como un *modelo.* En otro lugar he propuesto que la TC es un *contexto determinante,* capaz de reorganizar determinados campos, precisamente todos aquellos en que se manifiesten formas y singularidades, bifurcaciones, rupturas sucesivas (catástrofes)..., los campos que estudian «morfologías» -como los procesos de embriogénesis, que sirvieron a Thom para iniciar las aplicaciones de la topología-. Es decir, habría que entender la TC como una teoría del vínculo entre bioquímica y topología para dar cuenta de la localización espacio-temporal: *las entidades biológicas serían funciones químicas moduladas por la localización espacio-temporal del organismo.* La TC permitirá así construir teoremas, verdades propias de las ciencias morfológicas a las que se aplica.

Por otra parte, Petitot habla de una *refutación o falsación débil.* El concepto de «falsación» no tiene aquí el sentido popperiano -la teoría puede *ser refutada* por medio de contrastes y pruebas empíricas-, sino otro mucho más lato; en palabras de Petitot: *"Manifiesta una propiedad reseñable que puede ser sometida al test de la experiencia y que es, por tanto,* falsable". Y continúa en nota: *"Lo que nos hace salir de una semántica descriptiva para acceder a una semántica formal efectiva donde la formalización* no ha de quedar sin consecuencias".

Asociando ambas hipótesis *-contexto determinante* y *falsación débil-,* diríamos que, del mismo modo que la *circunferencia* nos permite establecer relaciones entre ángulos, rectas, etc., dados a la escala del propio campo donde se recortan y que van configurando las estructuras trigonométricas: seno, coseno, tangente..., los *verbos* nos permitirán establecer relaciones entre los diferentes actuantes dados a la escala lingüística y que van configurando las estructuras de Sentido o Significado: Ser, Vivir/Morir, Aparecer/Desaparecer...; pues el formalismo topológico nos indica que estas singularidades no se dan de manera separada, independientes las unas de las otras -como si las singularidades fuesen las categorías disyuntas a través de las cuales se conoce el mundo-, sino que están en relación de complejidad según transformaciones de proyección: las catástrofes o singularidades son secciones unas de otras. De entre todas las posibilidades que el modelo *geométrico-topológico* puede procurar a la Lingüística, la que vamos a desarrollar aquí se deja formular en la siguiente tesis (fuerte): *la existencia de una jerarquía topológica entre las diversas formas semánticas, desde el* pliegue a *la* umbílica parabólica, *que sería la siguiente:*

Catástrofes superiores

X_9 Doble cúspide (de centro organizador x^4+y^4)

.

(E_6) Cúspide + Pliegue (de centro organizador x^4+y^3)

.

Catástrofes Ordinarias

Cuspoides	Umbílicas	
($A_{\pm 5}$) Mariposa	(D_5) Umbílica Parabólica	
↓	↓	↓
↓	(D_{-4}) U. Elíptica	(D_{+4}) U. Hiperbólica
↓		
(A_4) Cola de milano		
↓		
($A_{\pm 3}$) Cúspide		
↓		
(A_2) Pliegue		
↓		
Morse		

Y, en consecuencia, cada verbo que pertenece a un tipo de singularidad superior contiene -como sección, corte o proyección suya- las singularidades de tipo inferior.

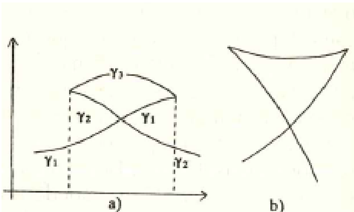


Fig. 7.1 Valores críticos de x^4 y separatriz de x^5

Veamos un ejemplo de cómo el grafo de los valores críticos de la cúspide x^4 sobre el plano *(y, b),* se identifica con una parte del conjunto catástrofe de x^5. Supongamos el plano de control de la *cúspide* de la figura 7.1a.

Tracemos un camino γ paralelo al eje de las *b* y a<0. En el exterior de la cúspide no hay más que una rama *γ1* que es el valor del mínimo. Al atravesar la arista del plano de control, hay un punto en que nacen dos nuevos caminos γ2 y γ3. Al atravesar la arista del punto de conflicto los caminos γ1 y γ2 se intersectan transversalmente al crecer los valores críticos. Al alcanzar la otra arista del plano de control, los caminos γ1 y γ3 desaparecen en un punto muerto y permanece sólo el camino γ2 al exterior del de la cúspide. Puede comprobarse por mera «visuali-zación» que la figura obtenida es semejante cualitativamente al plano de control de la catástrofe «cola de milano» [Fig. 7.1 b].

Esta hipótesis, suponemos, es una manera de introducirse en el análisis del lenguaje de una manera que ha de ser muy fértil y rica. Es lo que llama Wildgen *el cuarto principio de interpretación* o de *la inferencia dinámica,* que conecta los arquetipos *A,* con la serie compacti-ficada *D* [Cf. cap. 2]:

"Podemos decir que uno de los arquetipos semánticos correspondientes incluye a otro, i.e., el arquetipo más simple puede ser inferido dinámicamente. Llegamos, así, a una noción cuasi geométrica de inferencia".[9]

Estaría en nuestras manos ejemplificar esta ¡dea con frases elegidas *adboc.* Por ejemplo: «Eva (M1) da una manzana (*M2)* a Adán (M3)», que ejemplifica el arquetipo de *transferencia* A5 [Cap. 6]. Supongamos que los actuantes son *M1, M2* y M3. Entonces podríamos encontrar los arquetipos de *emisión* y de *captura* A3 como componentes del arquetipo de *transferencia,* A5.

«Eva (M1) da una manzana (M2))»

«Una manzana *(M2)* es cogida por Adán (M3)»

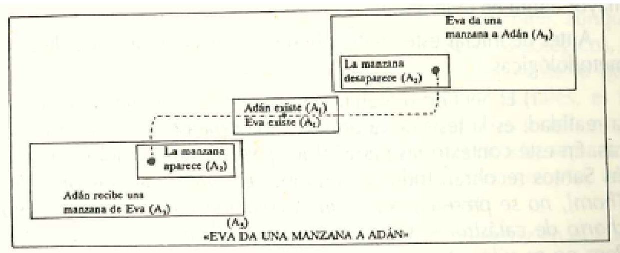


Fig. 7.2 Arquetipo de *transferencia*

En estas figuras podemos encontrar, además, los arquetipos de pliegue, A_2*:*

«La manzana aparece (M2)»

«La manzana desaparece *(M2)»* Y, en éstas, la estabilidad Morse, *A1:*

«Adán existe (M3)»

«Eva existe (M1)»

«La manzana existe (M2)» [Fig. 7.1].

Pero esta manera de realizar el análisis podría ser criticado -y a *fortiori* en una presentación de la teoría- por argumentar bajo la figura de la *petitio principii.* Al igual que ocurre con los ejercicios utilizados habitualmente en lógica y en teoría de conjuntos, este ejemplo es muy artificioso y su validez depende de la aceptación de la teoría. Por eso, creemos que es necesario hacer el esfuerzo de comprobar la capacidad de esta hermenéutica en textos realizados «fuera de» la teoría, ajenos a la TC, de la misma manera que, por ejemplo, la Teoría de Modelos ha de mostrar su verdad en el tratamiento de la Inteligencia Artificial.

La tesis que se pone en juego es la siguiente: así como cuando en Biología un centro se despliega y el embrión va desarrollando y estabilizando sus partes morfológicas de manera regular, en Lingüística, cuando aparece un verbo el proceso de despliegue y estabilización se lleva a cabo *-¡necesariamente]-* a través de nombres, preposiciones, adverbios... de acuerdo con la valencia del verbo, que limita los actuantes de las frases u oraciones. Por sucesivas proyecciones pueden ir apareciendo otros verbos hasta alcanzar en el último estrato el verbo *ser,* que ha de estar, por tanto, incorporado en cualquier otro verbo de mayor altura en la jerarquía.

Antes de iniciar este análisis hemos de hacer unas consideraciones metodológicas.

1) El Sentido o Significado pertenece a ámbitos diferentes de la realidad: es la tesis de la universalidad para las ciencias morfológicas. En este contexto las entrañables palabras del sociólogo Luis Martín Santos recobran todo su sentido: *"La vida, ante sus ojos [los de Thom], no se presenta como una evolución continua, sino como un chorro de catástrofes, y catástrofes muy sabias, si cabe la expresión. Pero no es sólo esto; es que los embriones siguen el mismo ritmo de danza que, por ejemplo, un rayo de luz que*

se divierte *trazando las llamadas* causticas en *una taza de café, así que, bien entendido, si bebiéramos tal café beberíamos más misterios de los que superficialmente podrían señalarse. Pronto la catástrofe saltaría* a *otros campos y se encontraría que la trayectoria del neurótico y la del* original *no eran muy diferentes de la que seguirían las grietas de una tierra de secano o las grietas que se forman en un muro de cemento mal fraguado"?*

2) No es posible afirmar que cualquier texto y en cualquier ocasión habrá de admitir el análisis de la Semántica Topológica, pues la TCE sólo tiene capacidad para expresar las figuras más simples. La complejidad del argumento puede dotar al texto de un carácter muy rebuscado y artificioso, para lo que se requerirán los teoremas de la *TCG,* que hoy parecen estar fuera del alcance de la teoría.

3) Nuestros ejemplos son, fundamentalmenete, *poéticos.* Es más fácil realizar el análisis en la poesía o en los monólogos teatrales versificados, pues ahí los verbos se encadenan más fácilmente por su conexión semántica. Porque en una conversación, los malentendidos, los *non sequltur,* los *ignorantia elenchl,* etc., proceden de la dificultad para colocarse en el conjunto catastrófico correcto. Daremos un ejemplo de la vida cotidiana usual de nuestras ciudades, que muestra la distancia entre la «situación real-topológica» de varios individuos y el lenguaje que se utiliza para la comprensión «real-intencional» de los interlocutores: el aparcamiento de los automóviles. Supongamos que en un barrio de gran densidad automovilística y en una de sus calles *sólo* hay un hueco para aparcar. En paralelo a este hueco se detiene una camioneta de transporte que deja ver el hueco, ya que no lo tapa del todo, pero que impide el aparcamiento normal. Un automovilista intenta dejar allí el coche y tras varias maniobras ha de desistir por la dificultad de sortear la camioneta. El repartidor, mientras va de un lado para otro, observa al conductor y permanece indiferente frente a él, mientras se queja a algunos peatones con quienes se tropieza de la insolidaridad ciudadana, de la falta de respeto al trabajador, de lo mal que conduce la gente y de un buen largo etcétera. Pues bien, aunque los parámetros que aquí hay que tener en cuenta sean psicológicos, o sociológicos, o sociopsicológicos, lo que se produce, y es de lo que trataría de dar cuenta la teoría de los despliegues universales, es la geometrízac/on de todo ese semantismo del lenguaje encauzado a través de conceptos como: «ayuda», «ruego», o

«amabilidad»; semantismo que queda esquematizado por, pongamos como ejemplo, una umbílica elíptica, *penetrar,* en el caso del automovilista:

«El automovilista *(quiere) penetrar/ (no puede) penetraren* el hueco» y por una umbílica parabólica, *cerrar el paso,* en el caso del transportista:

«El repartidor *(quiere) cerrar el paso, bloquear* al automovilista» Las semánticas del automovilista y del repartidor son completamente diferentes, porque diferentes son las esquematizaciones del semantismo. (Obsérvese, de paso, la característica de *localidad* del semantismo de las catástrofes, frente al carácter global de los conceptos: «solidaridad», «ayuda», etc.). Por eso puede decirse -insiste Peti-tot- que la TC es un *lenguaje,* un lenguaje formal en un sentido absolutamente nuevo. Es un lenguaje no lógico, sino geométrico-topológico, estructurado como un *lenguaje natural,* un lenguaje cuya Semántica está *geometrizada* y cuya Sintaxis está, localmente, constituida por accidentes e interacciones más simples, accidentes e interacciones arquetípicos «ritualizados» y, por tanto, automatizados.

Frente al *«¡Calculémos!»* de Leibniz, Thom parece decirnos: *«¡Espacialicemos!»*

Un *discurso* se define, desde el punto de vista de la TC, como un conjunto de arquetipos semánticos vinculados de múltiples maneras:

i) Por una intencionalidad *meta-discursiva.* El arquetipo dominante está distribuido en múltiples arquetipos jerárquicamente inferiores. Aunque el inicio y el final de un discurso sean muy simples, el camino que conduce de uno a otro puede ser muy complejo. Así ocurre en el *Cántico Espiritual de* Juan de la Cruz.

- Se inicia con un verbo bastante simple: *salir.* La Amante sale de casa con la voluntad de dar alcance al Amado: *"¿A dónde te escondiste, / Amado, y me dejaste con gemido?/ Como el ciervo huiste / habiéndome herido;/salí tras Ti clamando, y eras ido".*

- Al final, se pretende llegar a la identificación entre la Amante y el Amado para su goce, mediante un verbo de tipo *cúspide: "Gocémonos, Amado, /y vamonos a ver en tu hermosura/al monte y al collado /do mana el agua pura;/entremos más adentro en la espesura".*

- En el intermedio, durante la búsqueda del Amado, el camino se va enriqueciendo con acciones (= verbos) mucho más complejas, v. gr.: *"¡Ay quien podría sanarme! /Acaba de entregarte ya de vero; /no quieras enviarme / de hoy más mensajero, / que no saben decirme lo que quiero",* etc.

ii) Por medio de un esquema sonoro unidimensional que no tiene apenas en cuenta la semántica, como el arranque de *El Señor presidente* de M.A. Asturias: *"¡Alumbra, lumbre de alumbre, Luzbel de piedralumbre, sobre la podredumbre! ¡Alumbra, lumbre de alumbre, sobre la podredumbre, Luzbel de piedralumbre! ¡Alumbra, alumbra, lumbre de alumbre..., alumbre..., alumbra..., alumbra, lumbre de alumbre..., alumbra, alumbre...".*

Corolario: Lo que esperamos del discurso normal es una posición intermedia; que comporte contenidos semánticos -por ejemplo, que los verbos se entrelacen unos con otros con sentido- y que, a la vez, el discurso posea cierta sonoridad, cierto ritmo. Para conseguirlo utilizamos muchas veces los modelos lógicos (autoformantes), que continuamente transgredimos (por ejemplo, a través de falacias, sofismas... como la *petitio principii,* el *quid pro quo,* las *falsas causas,* etc.) con el consiguiente asombro por parte de los lógicos y el correspondiente escepticismo sobre la Lógica por parte de los lingüistas.

iii) Además, en los discursos no suelen aparecer explicitados todos los verbos que, sin embargo, contiene el verbo que domina semánticamente. En el ejemplo trivial expuesto, «Eva da una manzana a Adán», el verbo *dar* tiene como proyecciones suyas los verbos: *recibir* («Adán *recibe* una manzana de Eva»), *aparecer e/ desaparecer* («La manzana *aparece* y *desaparece»), ser* («Adán es», «Eva es»). Aunque no se expli-citen, afirmamos, están contenidos en el verbo ciar, son sus proyecciones topológicas «naturales».

Quisiéramos presentar, entonces, algunos textos en los que se realice un ejercicio de este tipo, donde los verbos queden engarzados o ensortijados a la manera catastrofista (TCE), como una muestra de esos constreñimientos que imponen los *arquetipos* al uso local de los verbos. No es fácil, en todo caso, hallar esos textos, porque, en general, el lenguaje, como los sistemas morfológicos, se presentan en estructuras muy complejas. Piénsese en un organismo animal y en la complejidad de sus órganos, sus tejidos, sus moléculas... Sin embargo, como hemos indicado en el capítulo 2, un organismo animal puede representarse como un foro *topológico* [Fig. 2.1]. En efecto, ésta es la fuerza del pensar científico. La ciencia se caracteriza por «eliminar lo arbitrario ele la descripción», como dice el propio Thom. Y hay que recordar, para espíritus poco avisados, que la esencia del método científico busca la simplicidad: desde las primeras figuras trigonométricas con las que se midieron distancias entre astros, pasando por las nunca elogiadas en demasía coordenadas cartesianas, hasta los gratos de Feyman en mecánica cuántica. Ni la tierra o el sol son esferas, ni una bala de cañón recorre una línea recta en un plano, ni los electrones intercambian fotones virtuales a lo largo de un zarcillo... Pero sin tales herramientas -esferas, líneas rectas, sinusoidales- la ciencia sería inimaginable.

7.2. PRIMERA VÍA DE ANÁLISIS: DE LOS «PUNTOS MORSE» A LA «UMBÍLICA PARABÓLICA»

La hipótesis fundamental de la TC es solidaria con el concepto topológico-geométrico de *aplicación entre superficies,* que se opone al de *generatividad* de la lógica [Cap. 3], Como la variable del despliegue es el tiempo t, cada uno de los momentos: t_1, t_2, t_3..., t_n, puede considerarse como una *proyección* de la estructura catastrofista. De esta manera, una singularidad, en general compleja, puede proyectar una singularidad más simple y, aparentemente, dar la impresión de que esa morfología está regida por la singularidad minimal. Por eso, al utilizar un verbo, éste puede estar regido por otro que lo contenga, siendo aquél una proyección suya.

Esta hipótesis pone en marcha un pensamiento originalísimo de J.B. Vico, que no sabemos haya sido desarrollado, por lo que cabe sospechar una carencia de desarrollo científico adecuado. Vico defendió la tesis de que una lengua «escrita» según caracteres geométricos *precedió* a la lengua «hablada» según sonidos articulados. Comenta Vico: *"Lo que se prueba con evidencia a partir de los mismos poemas de Homero, y especialmente en la* Odisea, *ya que Josefo sostiene contundentemente contra el gramático griego Apión que en tiempos de Homero aún no se habían descubierto entre los griegos las letras vulgares. Éstos, con el sumo grado de ingenio, en el que ciertamente aventajaron a todas las naciones, tradujeron posteriormente dichas* formas geométricas *a las* formas de sonidos articulados *diversos, y con suma belleza formaron de ellos los caracteres vulgares de las letras; después éstas serían tomadas por los latinos, y el mismo Tácito destaca que fueron semejantes a las antiguas griegas"*[u]. ¿No es extraordinario? ¿Cómo no asociar los *arquetipos* semánticos de Thom a esas *formas* geométricas de Vico? ¿Cómo no ver en estas estructuras globales, en los universales lingüísticos que luego se van particularizando en múltiples sonoridades, las «formas internas» -como gustaba decir Hum-boldt-, el estilo lingüístico de cada lengua? ¿Se nos permitirá siquiera pensar esta sugerente hipótesis?

Ahora bien, inmediatamente nos tropezamos con un problema metodológico básico que resulta de las maneras en que las proyecciones pueden ser aplicadas: 1) Una que va de lo global a lo local; en este caso a partir de un verbo muy complejo (tetravalente, trivalente...) se van «proyectando» sucesivamente verbos de menor complejidad. 2) Otra que va de lo local a lo global; a partir de un verbo simple (cerovalente, univalente...) se intenta recuperar la morfología compleja originaria.

Estos dos métodos dan lugar a tipos de análisis completamente diferentes: y si en el primero no surgen más problemas que los propios de la teoría, en el segundo la recuperación siempre es muy comprometida. Una de las críticas de Zahler y Sussmann a la TC es que si se pudiera reconstruir/deducir la forma completa de la superficie a partir de una información parcial, entonces podría conocerse el comportamiento global y, *a fortiori,* el mundo entero. Éste sería deducible a partir del puro pensamiento, a partir de un conocimiento mínimo local. Pero no es posible tal reconstrucción empírica, y en eso estamos completamente de acuerdo con los críticos de la TC. Hay que matizar, sin embargo, y comprender los objetivos limitados de la teoría, que afirma, exclusivamente, que hay *constreñimientos o límites semánticos* y no que haya *consecuencias necesarias* globales semánticas. No puede confundirse *inteligibilidad global* con *reconstrucción* *empírica global.* Cada texto concreto exige su recorrido específico, aunque esa particularización no tiene por qué ser reduccionista-atomista, que es lo que no parecen comprender sus críticos. Aquí se ha defendido una ontología estructural y dialéctica [Cap. 3], que nos permite comprender los textos sustentados en una estructura global de *sentido,* cuyos presupuestos tratan de entender las teorías lingüísticas estructuralistas, incluida la inspirada en la TC.

Lo mejor será ejemplificar ambos caminos: el que nos conduce de lo simple a lo complejo, de lo local a lo global, y el que nos permite pasar de figuras complejas a otras más simples que éstas llevan incorporadas. Comenzaremos en este apartado por la vía más difícil, de lo simple a lo complejo, para lo que nos apoyaremos en el conocido monólogo del *Hamletde* Shakespeare.

HAMLET

Ser o no ser... He ahí el dilema.
¿Qué es mejor para el alma,
sufrir insultos de Fortuna, golpes, dardos,
o levantarse en armas contra el océano del mal,
y oponerse a él y que así cesejí? Morir, dornmr...
Nada más; y decir así que con un sueño
damos fin a las llagas del corazón
y a todos los males, herencia de la carne,
y decir: ven, consumación, yo te deseo. Morir, dormir,
dormir... ¡soñar acaso! ¡Qué difícil! Pues en el sueño
de la muerte ¿qué sueños sobrevendrán
cuando despojados de ataduras mortales
encontremos la paz? He ahí la razón
por la que tan longeva llega a ser la desgracia.
¿Pues quién podrá soportar los azotes y las burlas del mundo,
la injusticia del tirano, la afrenta del soberbio,
la angustia del amor despreciado, la espera del juicio,
la arrogancia del poderoso, y la humillación

que la virtud recibe de quien es indigno,
cuando uno mismo tiene a su alcance el descanso
en el filo desnudo del puñal? ¿Quién puede soportar
tanto? ¿Gemir tanto? ¿Llevar de la vida una carga
tan pesada? Nadie, si no fuera por ese algo tras la muerte
-ese país por descubrir, de cuyos confines
ningún viajero retorna- que confunde la voluntad
haciéndonos pacientes ante el infortunio
antes que volar hacia un mal desconocido.
La conciencia, así, hace a todos cobardes
y, así, el natural color de la resolución
se desvanece en tenues sombras del pensamiento;
y así empresas de importancia, y de gran valía,
llegan a torcer su rumbo al considerarse
para nunca volver a merecer el nombre
de la acción. Pero, silencio... la hermosa Ofelia ¡Ninfa,
en tus plegarias, jamás olvides mis pecados!

Las palabras con que Hamlet inicia su monólogo nos recuerdan aquellas otras del *Poema* de Parménides con las que exponía las dos posibles vías de investigación: «La primera, que es y no es No-ser... la otra, que no es y es necesariamente No-ser...». En uno y otro caso, la primera impresión en el lector es la de la trivialidad de las frases vinculada al verbo «ser». Esta trivialidad gramatical ha de ser compensada rápidamente -si se pretende algo más que expresar un truismo-, por un verbo de gran potencia, que manifieste un proceso conceptual vigoroso. Pero ¡ojo! esto no es cierto absolutamente, porque puede haber un pensamiento que se mantenga expresamente ahí, en la máxima estabilidad, como el pensamiento de los *nirvana* de que escribe Ortega: *"Y esta salvación consiste en la extinción,* nirvana, parinirva-na. *El budismo proporciona la táctica para conseguirla, y el que ejercita sus preceptos logra dar a la vida un sentido que por sí no tiene: la convierte en un medio de anularse a sí misma"*[18]. Ahora bien, en la cultura occidental, una cultura de la *razón práctica,* de la *acción,* de un *Yo que pone* *el Mundo,* de la necesidad de *transformar* las sociedades... (Kant, Goethe, Fíente, Marx...) suele darse el paso del *ser,* de la estabilidad, de la calma, al *hacer,* a la desestabilización, a la lucha, con enorme vigor. Y eso hace Hamlet. «Ser o no ser» es la palanca que le conduce a utilizar verbos de acción tan complejos como *poder soportar, gemir, confundir....* Porque este «ser o no ser» no es lo específico de una vida, sino lo común a todas.

Ayudados por la semántica catastrofista, diremos que hay una disyunción de la singularidad *Morse* (x^2) sin espacio de control: *ser.------*; *no ser.------*. Si la generalidad de la figura es máxima, la riqueza de sentido es mínima. Así que Hamlet tiene que enriquecer el campo semántico, tiene que «canalizar» ese «ser», cuyo arquetipo semántico es el *pliegue de* germen x^3 [Cap. 6]. ¿Qué posibilidades tiene? En principio todas, podría decirse; por tanto, no está impelido a utilizar este o aquel verbo (no puede deducirse la forma global). Sin embargo, hay una especie de compromiso, nos encontramos ante un constreñimiento *(contrainte):* por un laclo, con aquellos verbos que nos conducen a una estabilidad mínima, y, por otro, con aquellos otros que nos conducen a una estabilidad máxima. Por eso, el príncipe duda entre elegir el suicidio *(la cola de milano),* arquetipo de máxima inestabilidad ($x+x^2+x^3+x^5$ parametrizada en el despliegue: cx+£>x^2+ax^3+A'^{5}), o el sufrir los insultos (la *cúspide),* arquetipo de máxima estabilidad ($x+x^2+x^4$ parametrizada en el despliegue: $bx+ax^2+x^4$).

Volvamos al *Poema* de Parménides, que nos será de gran utilidad para comprender al príncipe Hamlet, como veremos. Tras negar en él la «vía del No-ser», se vio obligado a recuperar la semántica cotidiana de manera muy inquietante. De ahí que una de las discusiones más significativas sobre el *Poema* sea la del número de vías hacia la verdad. Unas posiciones defenderán el número de tres: la del Ser, la del No-ser, y la de la Opinión. Otra interpretación, la neoplatónica, afirmará la existencia de, únicamente, dos vías de investigación (0801): la del ser (la «vía de la verdad») y la del no ser (la «impracticable»). La (pseudo-)tercera vía, en cambio, recorre lo que no son sino meramente opiniones, las de aquellas gentes que tan pronto confunden como distinguen el «ser» y el «no ser», arrastrados por la costumbre, fiándose de los aspectos primarios de las cosas.

i) Así que, por una parte, el mundo de las apariencias serían los despliegues morfológicos que en la visión de Parménides se presentan como fenómenos, como puros *nombres* (ovoua), por cuanto aparecen como opuestos: *"Pues han decidido dar nombre* a *dos formas, de las cuales no es necesario una -esto es en lo que están extraviados-; las juzgaron de aspecto opuesto y les asignaron signos distintos entre sí, a una el fuego etéreo de la llama, que es dulce, muy leve, igual a sí misma por doquier, pero distinta de la otra; por el contrario, ésta es por sí misma lo opuesto, noche oscura, densa de aspecto y pesada. Te revelo el orden de todas las cosas verosímiles, para que nunca te aventaje ninguna opinión de los mortales".* Pero reconocemos en esta interpretación la lectura que hace Petitot de la TC: las morfologías despliegan toda la riqueza de opuestos, contrarios, dialéctica, diferencias, etc., que Parménides niega como puro nominalismo, mientras que afirma exclusivamente que «el ser es» y el «no ser no es», la pura identidad y la pura no-contradicción. Así, quienes siguen esta vía de las opiniones serán gentes que sostienen que las cosas *nacen* y *mueren,* se *generan* y *aniquilan,* etc., como sugiere el verso 40 del fragmento 8: *"Por tanto, todas las cosas son meros nombres que los mortales pusieron convencidos de que son verdaderos,* nacer y morir, ser y no ser...". Estamos corroborando que los verbos utilizados en el poema son los mismos que hemos destacado en las singularidades «pliegue»; *nacer, morir...,* y «cúspide»: *engendrar, anular...*

ii) Y, por otra parte, el *ser,* lo común a todos los despliegues, recibe en Parménides las características de la máxima estabilidad: inmovilidad (8,26), permanencia (8,29), homogeneidad continua (8,22), esfericidad (8,49) (que nosotros interpretaríamos como una variedad dotada de un único mínimo que se identifica con la totalidad). Una consecuencia de esta interpretación semántica es la clarificación de la Lógica; pues, según los términos de nuestro análisis del capítulo 3, esta vía del «ser» se calificó de *autoformante.* La lógica no será ya una propedéutica de todo saber, y mucho menos un saber, sino el resultado de proyectar variedades n-dimensionales a variedades cero-dimensionales (el punto). Éste es el descubrimiento de Parménides, quien afirma efectivamente que «todo lo que es ser, es» (y, por tanto, admite proyecciones) y «aquello que no tiene ser, no es» (no puede proyectarse en otra cosa, diríamos). Nada más (y nada menos). *Pero como el lenguaje mismo es unidimensional, entonces la* *lógica aparece como isomorfa del lenguaje con mayor naturalidad que de aquellas otras zonas n-dimensionales (n>2),* y de ahí proviene la confusión: parece que la lógica habría de identificarse con el lenguaje. Surge, así, la necesidad de la ciencia y la filosofía, que no podían aparecer más que para resolver estos problemas vinculados al lenguaje natural y al conflicto de sus momentos lógico y ontológico. Pues si bien podemos estar de acuerdo en que no puede ocurrir que algo sea y no sea a la vez, ¿puede la realidad reducirse al «ser» simplemente? Las Ideas platónicas, las Sustancias aristotélicas no serán sino el intento de recobrar otra vez el mundo que la primera reflexión ontológica había negado como pura identidad, de retornar a las morfologías difuminadas en el principio de no contradicción. Sólo que ahora la Sintaxis (las propiedades unidimensionales del «ser») y la Semántica (las propiedades n-dimensionales del «ser») quedan separadas y con unas dificultades enormes para su unificación. ¿Cómo es posible el Sentido? ¿Cómo es posible que las palabras signifiquen al margen de los signos, que poseen sus propias reglas de composición, sus propias leyes (autoformantes)? ¿Por qué nuestro lenguaje ni se reduce a lógica ni es un mero *flatus vocis?* ¿Cómo es posible la referencia al mundo por mediación única del lenguaje? Sintaxis y Semántica quedan enfrentadas y será labor de todo filósofo intentar explicitar sus relaciones.

En el *Poema* parmenídeo, ciertamente, la riqueza de los verbos se analiza en los terrenos de la *doxa.* Pero el principio de identidad y de no contradicción, las Ideas, la Sustancia... parecen residir en otro estrato ontológico. Esto significa una reduplicación del mundo, que era necesario unir, si es que unas entidades determinan (o ejemplifican) a las otras. Una forma de explicar la importancia de Platón es su propuesta de unir esos mundos a través de las Matemáticas, el único saber con capacidad para vincular ambos mundos: por una parte, el mundo de los fenómenos físicos, empíricos, engañosos, confusos..., junto al mundo de las opiniones de los hombres, siempre cambiantes; por la otra, el mundo de las realidades verdaderas. Platón entrevio un tercer mundo, el matemático, que pudiera contribuir a dar validez objetiva al subjetivismo y al escepticismo. Tal proyecto le condujo a suponer un mundo diferente al apariencial, al vivencial, para ubicar las entidades matemáticas que, desde entonces, han tomado a su cargo la responsabilidad de la prueba de la verdad y de la coherencia. El mundo fenoménico quedará definido por respecto al mundo Ideal. Pero éste no puede ser hipostasiado, porque no tendría sentido un mundo Ideal que hubiera perdido de vista al mundo fenoménico. Cuando el mundo Ideal fue pensado como trascendente -en Aristóteles, en Epicuro-, el mundo divino de las Ideas no pudo participar del fenoménico, y de ahí que el dios de Aristóteles se transforme en un *pensamiento de pensamiento o* en un Primer Motor ajeno a los asuntos humanos; como ajenos eran los dioses de Epicuro, que vivían al margen de lo que les pudiera ocurrir a los pobres mortales.

De esta manera -ya sea por *participación,* ya sea por *reflejo* o por cualquier otro procedimiento proyectivo- el Ser Ideal se enriquece, dejando de poseer propiedades exclusivamente autoformantes (principios parmenídeos de identidad y de no contradicción), para hacerse multidimensional y topológico (Ideas platónicas). Pero la geometría se *logificó* muy pronto porque los matemáticos no podían sustraerse a representar las figuras en el plano bidimensional, ayudados por el lenguaje natural, que se representaba en una secuencia unidimensional dentro del plano y que habría de regirse por los principios de la lógica. Thom, receloso con esta concepción que ve reproducirse en el proyecto comtemporáneo de *formalización* a partir de la obra de Frege, Rus-sell o Hilbert, prefiere arrancar de los presocráticos, que aún no habían caído en el logicismo. Su rechazo alcanza incluso al Aristóteles logicista. En un impresionante texto, señala:

"¿Por qué, en el inicio del pensamiento filosófico, los Presocráticos, de Heráclito a Platón, nos han dejado tan profundas opiniones? Es muy tentador pensar que el espíritu en esta época estaba aún en contacto casi directo con la realidad, que las estructuras verbales y gramaticales, al modo de una deformadora pantalla, no se habían interpuesto entre el pensamiento y el mundo. Con la llegada de los sofistas, de la geometría euclidiana, la lógica aristotélica, el pensamiento intuitivo dejó paso al pensamiento instrumental; la visión directa, a la técnica de la prueba. Ahora bien, el motor de toda implicación lógica es la pérdida de contenido informacional: *«Sócrates es mortal» enseña menos que «Sócrates es un hombre». Era, pues, fatal que el problema de la significación se eclipsara ante el de la estructura de la deducción. El hecho de que sistemas formales de las matemáticas escapen a esta degradación de la «entropía*

negativa» ha provocado ilusiones que el mundo moderno aún sufre: la formalización -distinta de un contenido inteligible- no puede ser fuente de conocimientos".

Así podría quedar planteado el problema de la *proyección.* El «ser» como una singularidad que se reduce al *punto.* Si consideramos que todas esas diferencias *-nacer, morir...-* quedan absorbidas en un *punto,* sólo un pensamiento de tipo dialéctico-estructural, y no reduccionista, puede acometer tal empresa. La reticencia hacia el *dinamismo* procede de la misma raíz, del ánimo antidialéctico que confunde los marcos científico y ontológico. Pues, en efecto: categorialmente, no puede confundirse un punto *físico* y un punto *geométrico.* Pero ortológicamente sí, pues uno absorbe al otro, como ya conoció Pascal: *"Por el espacio el universo me comprende y me absorbe como un punto; por el pensamiento soy yo quien lo comprende".*

Estas disquisiciones nos ponen en la pista del monólogo de Ham-let, quien emplea esa disyunción entre «el ser» y el «no ser» de manera morfológica y no lógica. El contexto no es ya el de la reflexión sobre el «ser« o el «no ser», sino algo más cercano al lenguaje ordinario: decidir qué camino tomar, si seguir

a) el camino del «ser», que nos hace caer en el infortunio

b) el camino del «no ser», que es el del mal desconocido.

De manera sorprendente para el lógico, el camino del «no ser» sí es viable -aunque sea moralmente malo-. Como esto significa apartarse de la posición lógica, los semánticos rechazan cualquier intento de formalización y se instalan en la intuición, en el sentido común fijado en el lenguaje natural. Pero ¿no cabría otro formalismo para acceder a la semántica? La respuesta ensayada aquí es la de que la TC posee esa gracia.

Si hemos traído a colación al viejo Parménides no ha sido por pedantería. Porque el dilema que plantea Hamlet -caer en el infortunio o en el mal desconcido- se habrá de resolver dependiendo de cómo se interprete el concepto de *negación,* piedra de toque de cualquier formalización. Este dilema puede reinterpretarse de esta manera: La negación que es el «no ser» ¿concierne a la lógica o a la morfología?

i) La oposición *lógica* del tipo A *vs. ->A.* ¿Cómo se introduce la «negación» en lógica y cuál es su significado? Quine, v. gr., se las ve y se las desea para evitar el círculo en la definición de la negación: *"la negación de una oración abierta de una sola variable queda satisfecha precisamente por las cosas que no satisfacían dicha oración".* Pero el recurso al concepto de *satisfacibilidad* y al modelo de Tarski tiene el inconveniente de que los «lenguajes» de que habla la teoría de modelos son, en realidad, sistemas matemáticos y no físicos, biológicos, sociológicos...: *"La teoría de modelos no es una teoría semántica que ponga en relación los lenguajes naturales con la realidad física y social, sino una teoría matemática que pone en relación unos sistemas matemáticos con otros sistemas matemáticos"*, señala Mosterín.

ii) Habría que hablar, sin embargo, de una oposición morfológica y no lógica. Petitot recurre a las nociones de *posición* y *junción.* Se trata de espacializar la significación y, si aceptamos que la lógica se refiere al caso de un despliegue de *codimensión cero* [Cap. 3], entonces el espacio semántico exigirá funciones que posean más de un mínimo. Un lugar, una posición, no puede representarse por un mínimo local estable de una curva «u»; hay que partir de un logos estable más global, que posea al menos dos mínimos, « u u ». Diremos, entonces, que la -lógica *no alcanza* ahora las situaciones geométricas, sino que las desborda. La lógica es un límite operatorio, puesto que en morfología no se habla de objetos, sino de valores posicionales. La Semántica no es una interpretación, sino una *articulación* de una substancia, su diferenciación; y la Sintaxis, una conversión actancial de la articulación semántica.

Petitot introduce, entonces, otro tipo de oposición: la oposición *privativa* del tipo A *vs.* no-A. Si en la oposición *lógica* se afirma un algo negado, en ésta se trata de afirmar la ausencia de algo. Esta equi-vocidad en el tratamiento de la *negación* ha provocado esa «alternativa ilusoria» en las tres grandes filosofías del siglo XX, que han optado o bien por la *objetivación* del sentido, utilizando la lógica como criterio absoluto de racionalidad (Positivismo); o bien por su reducción *eidética,* desbordando la lógica por los contextos «vivenciales» de la conciencia apofántica (Fenomenología); o bien por la *negatividad,* considerando la lógica como un momento negativo y a superar en un pensamiento más vigoroso (Dialéctica).

Para ejemplificar esta diferencia, Petitot recurre al cuadrado semiótico de Greimas, que es la representación visual de la articulación lógica de una categoría semántica cualquiera, en la que se establecen tres tipos de relaciones: a) de Contradicción. b) De complementa-ríedad; c) de Contrariedad [Fig. 7.2].

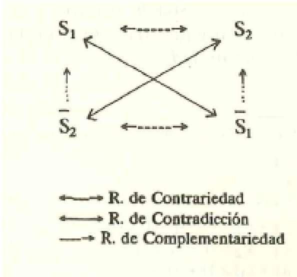


Fig. 7.3 El Cuadrado semiótico

Se puede demostrar que las operaciones que se establecen entre los elementos del cuadrado son *lógico-distributivas,* con la desagraba-ble consecuencia de confundir las relaciones de «implicación» y de «identidad». El cuadrado semiótico, realizado en términos booleanos, conceptualiza la negación como una conectiva *lógica* y no puede acoger, portante, los «despliegues» según la TC. O, dicho de otra manera, la operatividad booleana no queda acogida por el despliegue de la TC. Por eso dice Petitot que la inscripción lógico-combinatoria torna opaco el ser formal real-. En capítulo 3 (que nos parece esencial para situar desde el punto de vista lógico la TC) justificamos no sólo la estructura de esa «opacidad», sino también el motivo de la vinculación de lo lógico combinatorio y lo morfológico. La TC puede formalizar múltiples conceptos que desbordan la «fijeza» de las categorías lógicas. Gracias a ella podrán tematizarse conceptos siempre propensos a ser confundidos con los lógicos, por su cercanía, por su polisemia: *negación, oposición, equivocidad,* etc.

* * *

¿Qué manera tiene la TC de formalizar los múltiples conceptos que desbordan la «fijeza» de las categorías lógicas, definidas como arquetipos de *codimensión* cero? Ya hemos indicado que la singularidad Morse no posee espacio externo y es el correlato eidético del verbo «ser», cuya estructura da cuenta de la estabilidad como una reflexión en sí de la *identidad.*

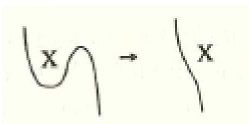
i) Al pasar a la *codimensión 1,* la lógica se desborda en consecuencia, y la riqueza semántica se hace efectiva. Ciñéndonos exclusivamente al concepto de la *negación,* se establecerán los siguientes matices que afectan a ese término:

a) Las catástrofes de conflicto simple (i.e., un logos inestable compuesto de dos mínimos ¡guales separados por un máximo) esquematiza la *oposición cualitativa:* entre dos lugares, uno domina a otro, que ha de ser presupuesto, y da cuenta de la relación de *junción:*

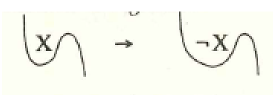
- *Conjunción,* cuando un lugar desaparece en el otro mínimo: ^{u}u;

- *Disyunción,* cuando los mínimos son iguales: uu.

b) El *pliegue* o catástrofe de bifurcación esquematiza la *oposición privativa.* La noción de *doble presuposición* entre una presencia y una ausencia es impensable en la lógica booleana [Cap. 1]. La ausencia de un lugar ha de estar conectada con el lugar presente, a través de un espacio *U* que los conecte. El operador capaz de hacer inteligible esa ausencia es el *negador,* que no puede ser definido como una noción semiótica primaria (como se realiza en lógica), sino que ha de entenderse como una *bifurcación* y una *deslocalización:*



que transforman un no-marcado, en la metamarca de un «no», es decir, trasmutan una presencia de la marca en la ausencia de la marca. Asi podríamos representar la *negación:*



Es una abolición, una identidad que falta en ese lugar y cambia entonces radicalmente su ser. Ya no deberá ser paradójico el que pueda ocurrir una situación tan extraña como una determinación sin lugar, pues la determinación sale de su lugar, cae fuera, a otro lugar. ¿Dónde cae? Esto requiere de una interpretación que excede a la semiótica clásica. (Entre otros movimientos, lo ha intentado, por ejemplo, el psicoanálisis).

ii) Las figuras de codimensión 2, *cúspides,* poseen una complejidad que permite esquematizar el *conflicto dialéctico* (no el de la diferencia). El interés de esta cuestión traspasa los límites de este trabajo y sólo haremos una sugerencia: El conflicto dialéctico es explicado desde la TC como un conflicto entre los dos modos de identidad: la *identidad de localizador]* (univocidad asegurada por la referencia) y la *identidad semántica* (la equivocidad implicada por la producción). Ha de dar cuenta no sólo de la oposición cualitativa, sino de la oposición privativa. La cúspide, por su estructura, no puede ser unívoca: De ahí que sea la mejor figura de la *fuente de lo imaginario,* pues en la dinámica del concepto se da una alienación entre la univocidad asegurada por la referencia y la equivocidad implicada por la producción. La riqueza en la interpretación de la cúspide es enorme. Petitot ve en este esquema nada menos que las siguientes interpretaciones:

a) Los fenómenos de *proyección,* de coincidencia de opuestos.

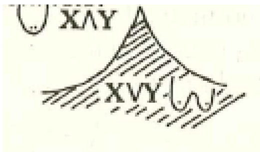
b) El fenómeno de Fusión, de Síntesis al modo de las «palabras-maleta»: *frumious (=fuming + furious).*

c) El escenario de la victoria (por captura o eliminación) de un Sujeto sobre un Antisujeto.

d) El concepto de identificación, al desaparecer el umbral, la diferencia.

e) La formación de los ciclos de histéresis.

f) La «bisagra» para pasar del funcionamiento primario (topológico) al funcionamiento secundario (lógico). Si la lógica no pudo pasar el test de la negación, tampoco puede pasar el de las otras operaciones: la conjunción y la disyunción, que corresponden a los puntos de catástrofe, bifurcación y conflicto:



iii) Las figuras de codimensión 3 esquematizan *la diferencia* y explican *cómo y por qué una oposición binaria se desarrolla como un cuadrado semiótico* (tipo Greimas): en el «espacio externo» son ahora posibles distintos caminos cualitativamente diferentes [Cap. 6], El cuadrado semiótico articula la relación entre una oposición cualitativa y las oposiciones privativas y permite esquematizar las nociones de transformaciones y variantes.

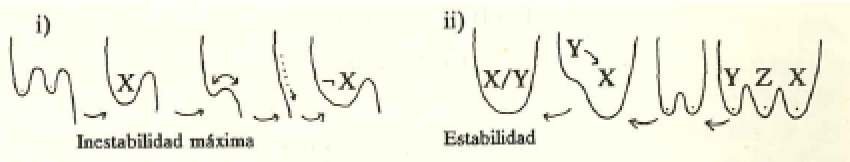
* * *

Dotados, entonces, de estas peculiaridades de la *negación,* que desbordan el nivel de la codimensión cero de la lógica, hagamos un doble quiebro.

Primero, volviendo a Parménides. Cuando el eléata prohibe el camino del «no ser», lo que está prohibiendo es que se pueda desarrollar algo que no contenga ya el «ser»; pero no puede negar las «negaciones», que son articulaciones del «ser», sin detrimento del mundo. Lo que Parménides hace es descubrir (que no formalizar) la lógica y su principio de no contradicción, es decir, la naturaleza de los signos autoformantes. Pero la riqueza del mundo es aparente, pertenece a un nivel que ya no es autoformante y sólo éste es deductivo. La vida es más rica que la lógica, afirmarán los sofistas. (Y más engañosa -por aquello de las sombras-, añadirá Platón).

Segundo, retornando a Hamlet. Cuando el príncipe se pregunta por el camino a seguir y rechaza el camino del «no ser», no es el «no ser» lógico, sino el morfológico, un «no ser» que *también* es la proyección de un verbo de mayor complejidad, *según los efectos de la propia estructura semántica,* como resultado de una inestabilidad brutal.

De la misma manera que el «ser» lo es de otra proyección, pero de gran estabilidad. Lo representaríamos de esta manera:



Se puede elegir una u otra solución, porque cada uno de los dos caminos es un proyecto de vida / muerte. En el monólogo de Hamlet se rechaza uno de ellos y se elige el otro. Para este objetivo se utilizan verbos metalingüísticos, como *poder soportar,* que conectan distintas proyecciones. El verbo que explica esta estabilización es *confundir,* un verbo muy complejo que consideramos perteneciente al arquetipo *umbílica parabólica* y cuyo despliegue se ofrece en la figura 7.3., en donde puede intuirse cómo todos los verbos quedan regidos por el verbo *confundir.* El arranque del monólogo: «ser o no ser», «vivir o morir», exige -si pretende ser algo más que un mero truismo- un verbo que dote a estos verbos de Sentido, que les comunique una Inteligibilidad gobal.

Entonces podríamos llevar a cabo lo que en música se llama «variación»; «jugueteo con las modificaciones, como continuación hacia un objetivo o como mera formulación de cosas siempre distintas». El autor desarrolla posibilidades que contiene una determinada armonía, etc. Es decir, el poema ha elegido estos verbos, pero podría haber elegidos otros, dejando intacta la estructura y las posiciones de los actuantes y elementos fundamentales. Para destacar esta propiedad proponemos un contraejemplo: Hamlet, al alcanzar el verso 21, podría haber dicho:

21 (...) ¡Quién puede soportar
tanto? ¿gemir tanto? ¿Llevar de la vida una carga
tan pesada? Nadie, si no fuera **[por esa fe que Dios, la Iglesia Católica,**
las diversas Iglesias Protestantes, el catarismo, etc.
25 nos regalan con la gratuidad de la esperanza]
haciéndonos pacientes ante el infortunio
antes que volar hacia un mal desconocido.

Elegir entre una u otra composición dependerá -pues se conservan idénticos contenidos semánticos- de la sonoridad de las palabras en inglés, del pretendido efecto rítmico en el oyente, o de cualesquiera otros elementos exteriores al componente semántico.

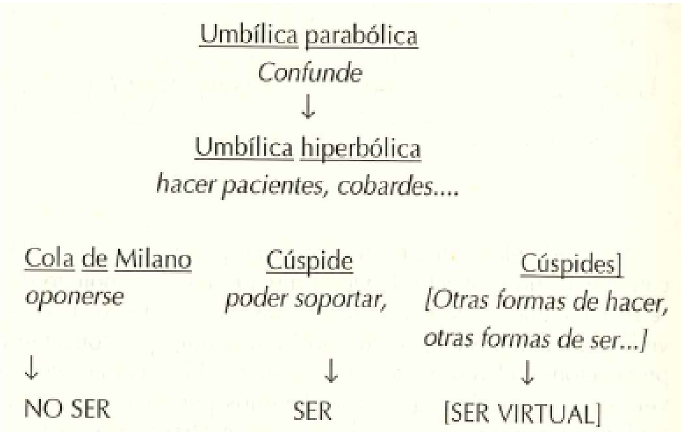


Fig. 7.4 Despliegue del verbo confundir en el monólogo de Hamlet.

No sería, por consiguiente, el *no ser* resultado de haber accedido a la Nada (¿qué Sentido puede tener esa frase?), sino de haber partido de un Ser cuyo arquetipo es un logos del tipo «cola de milano»: *oponerse, cesar.* En esto se diferenciarán Parménides de Hamlet: El *no* ser del primero es impracticable y el *no* ser del segundo es el resultado de situarse en un logos inestable. Mientras que el *no ser* parmenídeo es una vía de investigación paralela al ser, el *no ser* hamletiano procede, al igual que el *ser,* de un verbo muy complejo del tipo de las umbí-licas: *hacerse cobarde,* como resultado de un verbo jerárquicamente superior: *confundir,* una umbílica parabólica, que rige todo el monólogo-

Ciertamente quedan señaladas otras formas de «ser virtual» que podrían suceder si la umbílica hiperbólica dejara de regir, desapareciese por colisión con otro verbo que le hiciera frente. Como Heráciito decía: «μεταβάλλον ἀναπαύεται (el fuego *se estabiliza* cambiando)».

7.3. UN SEGUNDO ANÁLISIS: LAS FIGURAS ARQUETÍPICAS Y SUS PROYECCIONES.

Ahora hemos de llevar a cabo el análisis de los verbos en sentido contrario. No será *regresando* desde verbos de mínima valencia hacia otros verbos más complejos para recomponer la estructura, forma o arquetipo originarios -análisis que tanto recuerda al método goethiano de la búsqueda de las *Formas Originarias (Urbild)-,* sino *progresando* desde verbos complejos a otros con menor número de valencias, hasta alcanzar el mínimo posible cero-valente (o de codimensión cero) -análisis que nos recuerda el método analítico de la Geometría proyectiva-.

Para llevar a cabo este análisis, seleccionaremos los versos más interesantes -en vistas a nuestro propósito- de uno o varios poemas ilustrativos por cada uno de los arquetipos básicos y haremos un comentario sobre la jerarquización de los verbos, la disposición de los actuantes, más otras discusiones pertinentes para la teoría de la TC y para el análisis de textos.

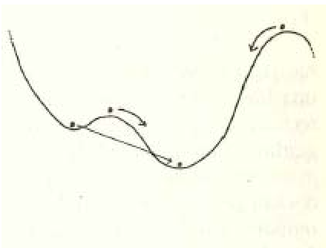


Fig. 7.5 Representación del verbo *ser*

El arquetipo «punto morse»: $\mathbf{x^2} + \boldsymbol{p}$

I

Con el júbilo único
de *ir viviendo* una vida
inocente entre errores,
y que no quiere más
que *ser, querer, quererse*
en la gran altitud
de un amor que va ya

queriéndose
tan desprendidamente
de aquello que no es él,
que va ya por encima
de triunfos o derrotas,
embriagado en la pura
gloria de su acertar.

II

(...) Que hay otro ser por el que miro el mundo
porque me *está queriendo* con sus ojos
Que hay otra voz con la que digo cosas
no sospechadas por mi gran silencio;

III

Ansia
de irse dejando atrás
anécdotas, vestidos y caricias,
de llegar,
atravesando todo lo que en ti cambia,
a lo desnudo y a lo perdurable.

IV

Y verte cómo *cambias*
-y lo llamas *vivir*-
en todo, en todo, sí,
menos en mí, donde fe *sobrevives.*

* * *

Hemos elegido algunos poemas de *La voz a ti debida* de Salinas para ejemplificar lo que podríamos llamar *esencialismo* poético, una búsqueda incesante e insistente de la estabilidad absoluta, que rechaza o elude todo lo que pudiera ser un impedimento para conseguirla: la multiplicidad, la disparidad, la riqueza vital con todos sus matices y transformaciones. Esto no significa que este poemario, considerado globalmente, se reduzca a un pliegue; podría hablarse de una *umbílica parabólica* si se interpretara como un acto de amor entre el Amado y la Amada a través del cual se da vida a las sombras, según los versos finales: *"[las sombrasl/ ¿Las oyes cómo piden realidadesjellas, desmelenadas,fieras,/ellas, las sombras que los dos forjamos/en este inmenso lecho de distancias?/ (...) Los dos les buscaremos/un color, una fecha, un pecho, un sol./Que descansen en ti, sé tú su carne/',* etc.. Pero aquí sólo queremos destacar esta parte de la singularidad, la parte en la que la búsqueda de estabilidad máxima se hace manifiesta.

En los versos que hemos indicado como texto I, el verbo *quererse* hace reflexivo: *quererse,* para remachar que no hay ningún actuante más allá, hacia el que pudiera dirigirse. Es el amor puro, que se desborda por la totalidad del mundo. Se desprende de toda ilusión, de los triunfos y de las derrotas (v. 12); se hace caso omiso de lo que cambia, de lo que configura la vida; pero también de lo que la perturba para acogerse, así, a lo eternamente perdurable, que no es otra cosa sino el *ser,* la «estabilidad» máxima, en el sentido propio de la teoría de las catástrofes.

Esta manera de plantear la «vida» ha impregnado mucha de la poesía de los «puros», de quienes pretenden alcanzar la plenitud expresiva como un correlato de la plenitud humana, para lo que se lanzan a depurar al máximo el sistema verbal, que sería el asociado de la concentración de las experiencias humanas en un profundo sentimiento que las abarca y homogeneíza.

Por tanto, los versos seleccionados significan que el acontecimiento o suceso descarta todo accidente, todo lo que se considera superfluo, para mantenerse subsumido en una (pretendida) esencia, regentada por el arquetipo del *ser,* sin contención ni impedimento alguno.

Como, por otra parte, este seres de carácter *local,* puede representarse en un sistema referencial. La figura 7.5 muestra el camino del verbo como una cuenca muy estable donde no existe ninguna singularidad que detenga o retenga las trayectorias que van a reunirse en el mínimo: el *vivir* sólo pretende *ser.*

Los versos del texto II explicitan los versos anteriores; porque este *vivir,* al identificarse con el *ser,* tiene una razón estructural que le hace inteligible. Ese *ser* es el sueño de otro actuante que vive y hace cualquier sacrificio por el amante, y así puede *ser* simplemente, pero *ser* como parte de singularidades más ricas. ¿Estaría el poema, entonces, pidiendo verbos de mayor complejidad? Esta sería una posibilidad y entonces el poeta tendría que seguir el camino que analizamos en el parágrafo anterior, introduciendo repentinamente un verbo con mayor número de valencias.

En los versos del texto III, el poeta elimina esta opción y se decide por anular cualquier enriquecimiento vital, porque en la vida de ella, de la Amada, sólo se busca el *ser:* elimina todo vestigio de vida femenina, abandonando «anécdotas, vestidos y caricias», lo que, desde la perspectiva más bien machista del Amado, sería la tríada que rige los afanes de la mujer: el parloteo, la vanidad y la necesidad de protección.

El verbo *atravesar* podría entenderse, en fin, como un *efecto túnel,* concepto estudiado por los físicos cuánticos. Si consideramos que el estado del único actante M1 está rodeado de mínimos cuya profundidad es mayor que la del mínimo M1*,* entonces éste se precipita en los mínimos más bajos sin necesidad de recurrir a parámetros exteriores. El mínimo M1 es capaz de atravesar la región que le separa del otro mínimo. Este fenómeno, el que una partícula pueda «filtrarse» por una barrera opaca de potencial, es uno de los rasgos más sorprendentes de la mecánica cuántica, que puede utilizarse aquí como analogía: como si la afectividad, el *quererse,* deformara de tal manera el «relieve» de la vida que el mínimo contacto con una singularidad (un mínimo), **le** hiciera identificarse con ella para alcanzar la estabilidad máxima, sin necesidad de ningún tipo de influencia exterior [Fig. 7.5].

Los versos del texto IV aclaran que todos los cambios, todas las transformaciones, todos los despliegues que, inevitablemente, han de producirse, no son nada, en realidad, porque su sobrevivencia se remite al *ser* del Amado, que acoge toda la multiplicidad manifiesta. El Amado y la Amada pierden su apariencia ordinaria para sumirse en la permanencia del *ser.*

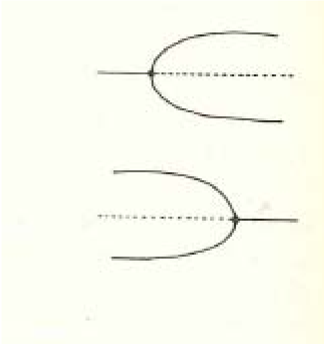


Fig. 7.6 Caminos de los verbos *vivir / desnacer*

El arquetipo «pliegue» y sus proyecciones: x^3+ax+p

Vuelve hacia atrás la vista, caminante
verás lo que te *queda* de camino;
desde el oriente, de tu cuna el sino
ilumina tu marcha hacia adelante.
Es del pasado el porvenir semblante;
como se *irá* la vida así se *vino;*
cabe *volverlas* riendas del destino
como se *vuelve del* revés un guante.
Lleva tu espalda reflejado el frente;
sube la niebla por el río arriba
y se *resuelve* encima de la fuente;
La lanzadera en su vaivén se *aviva;*
desnacerás un día de repente;
nunca sabrás dónde el misterio estriba...

* * *

Este soneto de Unamuno nos permite ejemplificar uno de los arquetipos más utilizados en el lenguaje ordinario, porque es el inicio de cualquier situación mundana: la vida es imposible sin *canalización,* sin lucha ante los procesos de difusión.

Los términos no contables -el agua, el aire, el fuego, la tierra-, aunque estables, no poseen valor (que puede ser negativo) hasta que no han sido canalizados. No es infantilismo comenzar haciendo una reflexión sobre los cuatro elementos de Empédocles, por más que la química del siglo XIX ampliase los elementos químicos básicos a un número superior a cien; los presocráticos realizan la primera labor racional en la «canalización» de lo que está ahí, de lo que nos rodea y contiene.

Cuando el agua se canaliza, por sucesivas transformaciones -líquido, sólido, gas, es vida (Tales). Cuando el aire se canaliza, a través de las operaciones de rarefacción y de condensación, es vida (Anaxímenes); cuando el fuego se canaliza, por mediación de un logos universal que conserva las proporciones del mundo, es vida (Heráclito). Así lo aprendió Aristóteles: cuando la tierra se canaliza mediante la forma, es vida.

La expresión genuina de la catástrofe *pliegue* tiene dos sentidos: Cómo nacen las cosas para tomar forma, para crear sus propios límites, sus bordes, para iniciarse en la vida, y cómo mueren y desaparen agotados, una vez perdida su energía.

El soneto unamuniano se sirve de la metáfora del *agua* para sentir la vida de los hombres y repite la historia que recorrió Tales. Es un canto a la muerte *-desnacerás-* y no hay ni un solo verbo de acción, de vida. Poema tremendamente plano, en el que únicamente importa la canalización de la vida camino de la muerte. Sumergido en un paisaje infinito, sin bordes, el caminante ha de fijar una vía -a modo del lecho de un río- para contemplar su vida, que igual que se *vino* se *irá* (v. 6), y ha de trazar sobre él, una dirección con sus dos sentidos:

i) El «hacia atrás» de la vida: se *vuelve la vista atrás* y sólo se ve un camino que se recorre mediante los verbos *pliegues: ir y volver.*

ii) El «hacia adelante»: donde, repentinamente, la muerte aparece.

Hasta ese momento, la vida del Sujeto M_1 se va tensando (canalizando) y sólo espera que algún parámetro -«resolverse», «avivarse»-, conduzca al sistema hasta un punto límite, crítico *-«desnacerás un día de repente»-,* a partir del cual ya no habrá nada que vivir [Fig. 7.6]

La situación del poema recordará al lector muchísimos otros escritos bajo este mismo efecto de «ver» (e identificar) la vida como una unidad, como un conjunto en el que se pierden los matices y sólo queda el *canal* por donde transita el hombre. Los versos de Antonio Machado -*Caminante, no hay camino /se hace camino al nadar. /Al andar se hace camino / y al volver la vista atrás / se ve la senda que nunca / se ha de volver a pisar*- son bien elocuentes. Debería sorprender la falta de atractores, de elementos que enriquezcan el poema. El sujeto observa su vida como si fuera lineal, plana; en ella han ¡do desapareciendo todas las pequeñas o grandes cosas ocurridas a lo largo de la existencia.

El arquetipo «cúspide» y sus proyecciones: x^3+ax+p

(...)
-Si por tus amores pena,
¡oh, malhaya su cantar!
y porque nunca los goce
yo le mandaré *matar.*
- Si le manda matar, madre,
juntos nos han de *enterrar.*
Él murió a la medianoche,
ella a los gallos cantar;
a ella como hija de reyes
la entierran en el altar,
a él como es hijo de conde
unos pasos más atrás.
De ella *nació* un rosal blanco,
de él *nació* un espino albar;
crece el uno, crece el otro,
los dos se van a *juntar,*
las ramitas que se alcanzan
fuertes abrazos se dan,
y las que no se alcanzaban
no dejan de suspirar.

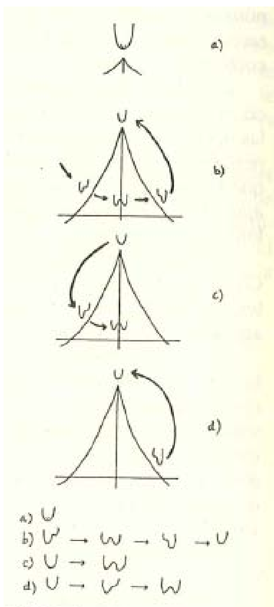


Fig. 7.7. Caminos de los verbos *juntar /separar / volar juntos*

La reina, llenar de envidia,
ambos los mandó *cortar,*
el galán que los *cortaba*
no cesaba de llorar.
De ella *naciera* una garza,
de él un fuerte gavilán,
juntos vuelan por el cielo,
juntos vuelan par a par.

* * *

Los versos de este magnífico romance, por tantos conceptos señalado y comentado, arcano que fuera de iniciáticos, admite una lectura ejemplar desde la TC, en la que puede comprobarse cómo se van encadenando varias catástrofes de tipo *cúspide.*

En realidad se conectan tres lazos de apresamiento, a partir de una situación conflictiva (un centro organizador simple, pero virtualmente complejo) por medio de la ruptura inestable por antonomasia: la catástrofe de conflicto.

a) Comienza el fragmento elegido en una situación trágica y con dos actuantes: una princesa M_1 y un conde M_2 que mueren violentamente (él por venganza, ella de tristeza) y son unidos, por mor de la tradición, en el interior de una iglesia. En ese punto singular, por tanto, están colapsados al menos, dos actuantes (dos mínimos separados por un máximo).

b) Primer conflicto: Los dos actuantes del inicio se transforman en un rosal blanco M_1 y un espino albar M_2. La acción de darse abrazos (v. 18) tiene el sentido de identificarse el uno con el otro. Cuando no lo consiguen, *suspiran* (v. 20), que es un verbo de tipo *pliegue:* se aplica una fuerza hasta alcanzar cierto nivel más allá del cual desaparece, no posee más energía y todo queda en el «gemido» de ese suspiro [Fig. 7.7a].

c) Segundo conflicto: Los dos actuantes, M_1 y M_2, una vez juntos forman una unidad. Una fuerza exterior, parametrizada por una mujer envidiosa (parámetro a) y con capacidad de mando, al ser reina (parámetro b), manda *desunirlos* y lo consigue [Fig. 7.7b], Esta no es una muerte de tipo negación lógica, sino topológica: es una ausencia, como se comentó unos párrafos más arriba.

d) Tercer conflicto: Cuando vuelven a aparecer los actuantes M_1 y M_2, mediante el verbo nacer (vv. 25-26), que pertenece a la catástrofe *pliegue,* se vuelven a unir, afectados por los parámetros «amor» y «volar». La unión ahora se realiza mediante el vuelo «par a par» [Fig. 7.7c],

Nos importa hacer observar cómo los verbos no son conceptos absolutos, pues puede cambiar el número de actuantes y, por tanto, su valencia. Ésta era una de las características que se imponían al verbo en el capítulo 5: su inestabilidad procedía de la indeterminación de los actuantes. Así:

i) El verbo *dar* (en *darse un abrazo)* no puede considerarse aquí trivalente y, por tanto, una singularidad *mariposa,* porque ciarse un *abrazo* confunde el objeto de intercambio M_3 con el sujeto a intercambiar, el actuante M_2.

ii) El verbo *cortar* se utiliza en este contexto como un verbo bivalente y no tetravalente, como hubiera ocurrido de presentarse según el arquetipo umbílica parabólica. *Cortar* está usado como sinónimo de *separar.* Pero también podríamos considerar esta cúspide como una sección del verbo *cortar* entendido como umbílica parabólica, que aquí elude el instrumento porque sólo interesa al autor indicar el resultado de la acción y no la acción misma. El verbo *nacer* (pliegue) queda perfectamente colocado como una proyección del verbo *juntar,* para *juntarse* tienen antes que *aparecer/nacer* (pliegue), que *ser* (Morse).

El arquetipo «cola de milano» y sus pro yecciones: $x^5+ax^{\wedge}+bx^2+cx$

(...)

Mi corazón se muere
porque ni curas ni vendajes quiere...
No le mata la herida, se *suicida*...
Es verdad, es verdad que tú le heriste
con dulzura, con toda la dulzura
de que es capaz el corazón humano...
Mas él no quiere cura,
y se agranda la herida con su mano...
Y tanto ama la herida
porque la abriste tú, que alegre *muere,*
porque a perderte, Amor, *perder* prefiere
el doloroso encanto de la vida!

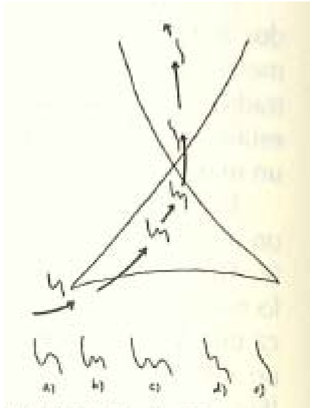


Fig. 7.8 Camino del verbo *suicidarse*

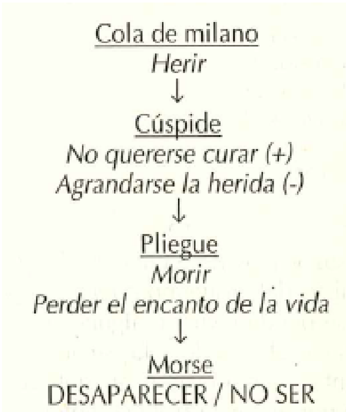
* * *

Estos versos de Villaespesa nos permiten considerar una cuestión siempre problemática. Aquí se menciona el verbo *suicidar* y después se describe la acción del suicidio. Hay, pues, una redundancia de tipo metalingüístico, como si no se confiara en que la descripción pudiera ser entendida. El verbo *suicidarse* es, por tanto, como el título de un poema: *nombra* la acción que describirá más tarde. Como ya sabía Lewis Carroll en *Alicia a través del espejo,* una cosa es «la canción», otra «cómo se llama la canción», otra diferente «el nombre de la canción», y otra completamente distinta «cómo se llama el nombre de la canción».

Parece inevitable en el Lenguaje Ordinario que el lenguaje objeto y los metalenguajes que procura estén mezclados sin solución de continuidad y que sólo un esfuerzo analítico intenso pueda lograr clarificarlo. Pues parece que se forma la paradoja [Cap. 1]: ¿Una «cola de milano» contiene una «cola de milano»?

Suicidarse, en consecuencia, no es un verbo simple como *no ser,* sino que puede ser descrito mediante un arquetipo tan complejo como la «cola de milano». Hay dos actuantes, el sujeto con corazón M_1, y la herida que recibe M_2. Esta herida, producida por una acción exterior, no se estabiliza, por ejemplo, *cerrándola, curándola,* etc., que son verbos de tipo *cúspide* en su sentido positivo de *unir, juntar...;* sino, por el contrario, M_1 la *agranda* (v. 8), que es un verbo *cúspide* pero de sentido negativo: *separar, escindir...* El actuante M_1 emite un objeto M_2, el agrandamiento de la herida, que es metaestable, y hace desaparecer al sujeto mismo, M_1 Su desaparición, en el momento en que la inestabilidad del sistema es total, le arrastra a *morir* (v. 10), un verbo *pliegue* en su sentido negativo. Así se precipita hacia el No-ser, antes que continuar en el ser de la vida [Fig. 7.8].

Conviene desplegar el verbo para captar los sentidos de ese *no ser* [Fig. 7.9].



El término *suicidio* está utilizado, en tanto en cuanto arquetipo sinónimo de A_5, metalingüísticamente. Ahora bien; el *suicidio* posee muchos matices, puede recorrer muchos caminos del espacio de control [Fig. 6.6]. En el poema se ha seleccionado, simplemente, uno de ellos.

El arquetipo «mariposa» y sus proyecciones: $x^6+ax^4+bx^3+cx^2+dx$

I

Tú no puedes *quererme:*
estás alta, ¡qué arriba!

Y para *consolarme*
me *envías* sombras, copias,
retratos, simulacros,
todos tan parecidos
como si fueses tú.
Entre figuraciones
vivo, de ti, sin ti.
(...) Con criaturas falsas,
divinas, interpuestas
para que ese gran beso
que no podemos *darnos*
me lo den, se lo dé.

II

(...) Ten cuidado.
Te vas a vender, así.
Porque un día el beso tuyo,
de tan lejos,
de tan hondo
te va a *nacer,*
que lo que estás *escondiendo*
detrás de él
te *salte todo* a los labios.
Y lo que tú me *negabas*
-alma delgada y esquiva-
se *me entregue, me lo des*
sin querer
donde querías negármelo.

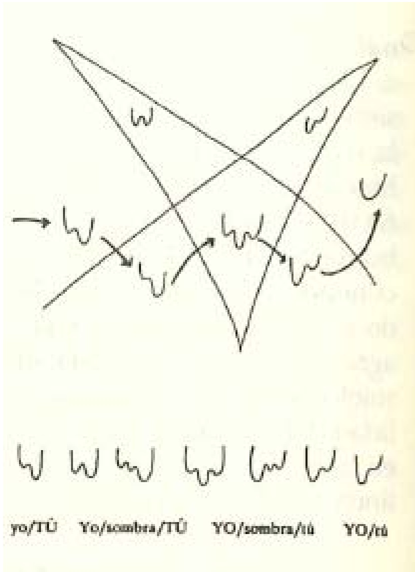


Fig. 7.9 Caminos del verbo *enviar*

En estos preciosos versos de Salinas prolongamos las sugerencias realizadas en el análisis del arquetipo *pliegue.* A pesar de ese deseo de alcanzar al ser, no se puede vivir sin algunos compromisos, incluso el de ponerse en contacto el Amado y la Amada.

Así que, un poco más allá de los versos antes mencionados, encontramos una situación que ha de ser modelada por una catástrofe compleja, como es la *mariposa,* y una sección desarrollada de esa singularidad. La jerarquización entre los verbos de tipo *mariposa* como *enviar* y de tipo *cúspide* como *entregar* queda perfecta y bellamente recogida en estos dos textos de Salinas.

¿Cuál es el significado del texto I? Tratemos de intuirlo espa-cialmente. ¿Qué significa estructuralmente? Parece que se trata del arquetipo del *mensajero:* la relación entre dos actuantes M_1 y M_3 sólo es posible por mediación de un objeto M_2. Ciertamente la «belleza»

del poema podría radicar -en el análisis semántico tradicional- en que el objeto que se ofrece se da en «copias» «sombras», «simulacros»..., lo que sería para nosotros una manera de corroborar nuestra teoría, o con la tradición platónica, etc. Pero no es éste el tipo de análisis que estamos realizando ahora.

Lo que nos interesa es su estructura *local,* que quedaría reflejada en la figura 7.10. Un sujeto M_1 emite un objeto M_2 y lo envía a un sujeto M_3. El camino que recorre se va explicitando en los dibujos: M_2 queda en el dominio de M_3, que lo hace suyo. Se dibuja así la relación: YO-TÚ por intermedio de las sombras. Resaltamos el TÚ con mayúsculas de «Tú me envías un mensaje»; un TÚ que va desapareciendo hasta el YO, que también resaltamos con mayúsculas, del final: «YO he recibido el mensaje».

Pero obsérvese cómo éste es sólo uno de los caminos posibles. En los versos del texto II nos encontramos con una situación diferente. El poeta podía haber recorrido otro camino; así lo advierte al princio (v.1): *"Ten cuidado. /Te vas a vender, así",* que admite la interpretación: «Ten cuidado, porque no siempre es posible acceder a una situación tam compleja como la catástrofe *mariposa».* Por ejemplo: podría haberse pasado de M_1 a M_3, sin el objeto y, entonces, no hubiera sido necesario utilizar este arquetipo del *mensajero,* sino uno más simple, una sección suya como la *cúspide;* y eso ocurre efectivamente en estos versos. Pues el «beso» que solicita el actuante M_1 podría recibirlo de M_3 sin más mediación, como en nuestra frase modelo: «El gato caza al ratón».

El poeta utiliza los verbos *entregar, dar,* sin objetos que cumplan el papel de intermediarios. Ahora bien, como no tendría sentido usar el verbo *dar* como arquetipo *cúspide* -puesto que *dar* es siempre *dar* algo-, se habrá de entender, entonces, que el verbo *dar* está siendo usado en este contexto como un verbo bivalente, sinónimo de verbos de tipo *cúspide,* parte del arquetipo *mariposa.*

ii) **Las Umbílicas**

Los verbos de tipo umbílico son mucho más complejos y, por tanto, mucho más difíciles de analizar. Poseen cuatro actuantes, si seguimos la que podríamos llamar «convención de Thom», que nos permite utilizar los puntos sillas y los máximos como actuantes, con lo que se amplía la utilización de los puntos singulares, que no quedan restringidos -en lo que a los actuantes se refiere- a los mínimos del potencial. Si fuera éste el caso, no podrían utilizarse las umbílicas para asociarse a los verbos tetravalentes, porque, ciertamente, las umbílicas sólo tienen uno o tres mínimos, pero no cuatro [Cap. 4]. Para poder tratarlas como generadoras de gratos actanciales es preciso considerarlas en el despliegue de catástrofes superiores X_9 de centro organizador x^4+y^4. En cualquier caso -y hasta que se resuelva técnicamente este problema- seguimos la sugerencia de Thom, que considera las umbílicas dotadas de cuatro puntos singulares aunque no sean todos ellos mínimos y, por tanto, como aruqetipos tetra-valentes.

Para el análisis de las *umbílicas* se seguirá el camino inverso al que se ha llevabo a cabo con las *cuspoides.* En lugar de comenzar por la singularidad más simple, el análisis se inicia con la umbílica parabólica, que es la más compleja y que, además de hacer honor así al espíritu que arropa esta segunda vía de análisis, progresando de lo complejo a lo simple, tiene la ventaja técnica de poner a la par las umbílicas elíptica e hiperbólica, ninguna de las cuales es jerárquicamente superior a la otra, porque ambas son las componentes, por deformación topológica, de la umbílica parabólica.

Esta consideración no puede olvidarse, porque, como ya se dijo [Cap. 4], existe alguna dificultad de carácter matemático para representar el espacio de control de la umbílica parabólica, lo que nos invita a estudiarla en términos, precisamente, de las otras dos umbílicas: la elíptica y la hiperbólica. Para ejemplificar esta idea se ha elegido un poema con un verbo del tipo *umbílica parabólica,* el verbo *cortar,* cuyo significado es el resultado de una doble acción: la de *penetrar* (umbílica elíptica) y la de *redondear* (umbílica hiperbólica).

Señalemos, por último, que los análisis, en vez de seguir una pauta común, se realizarán de tal manera que ofrezcan diversas posibilidades, permitidas por la teoría, no contempladas hasta ahora.

El arquetipo «umbílica parabólica» y sus proyecciones: $x^2y+y^4+ax+by+cx^2+dy^2$

Entre el índice y el pulgar
descansa [rests] la pluma gruesa, grata como un revólver.

Bajo mi ventana, el claro *raspar [rasping]*
de la pala que se *hunde [sinks]* en tierra arenisca:
mi padre, que *cava [digging].*Observo desde arriba

el esfuerzo de su trasero entre las plantas;
se dobla, y se yergue veinte años antes,
agachándose rítmicamente entre hileras de patatas
donde *cavaba [was diggingl.*

La bota gruesa *descansaba [nestled]* en la pala, era palanca
el mango apoyado con firmeza en la rodilla.
Arrancaba [rooted] brotes fuertes, *hincaba [buried]* la hoja brillante,
esparcía [to scatter] patatas nuevas que nosotros *recogíamos [picked],*
gozando [lovingl de su dureza fría en nuestras manos.

¡Señor, cómo *manejaba [could handle]* la pala el viejo!
Igual que su padre.

Mi abuelo *cortaba [cut]* más turba en un día
que nadie en la turbera de Toner.

Una vez le llevé leche en una botella
con un torpe tapón de papel. Se enderezó
para bebería, y volvió en seguida a la tarea
de *cortar [nicking]* y *cercenar [slicing]* con primor, *arrojando [heaving]* terrones
por encima del hombro, *ahondando [going down and down]* más y mejor
a la busca de la turba buena. *Cavando [digging].*

Se despierta en mí el olor frío a mantillo,
el chapoteo de carbón empapado, los bruscos cortes
de la hoja que atraviesa raíces vivas.
Pero yo no tengo una pala con la que seguir a hombres como ellos.

Entre el índice y el pulgar
descansa [rests] la gruesa pluma:
cavaré [i 'll dig] con ella.

* * *

Habrá que volver a insistir en que el tipo de análisis que se lleva a cabo queda limitado a la jerarquización de los verbos y a su *espaciali-zación.* No se tienen en cuenta cuestiones decisivas en el análisis clásico, cuestiones que pertenecen tanto al plano formal poético como al plano material lingüístico. En el poema de Heany nos despreocupamos de cuestiones centrales como las destacadas por H. Gevers:

- El crecimiento de las estrofas, que van aumentando en un verso hasta la quinta en el poema original [y que reintroducimos en la traducción de Brian al castellano, que no respeta dicho crecimiento].

- El uso de los verbos para expresar los ritmos en que se muestra el cuerpo humano: en su movimiento vertical hacia arriba (se *enderezó)* y hacia abajo (me *asomo, miro al fondo, ahondo...)*

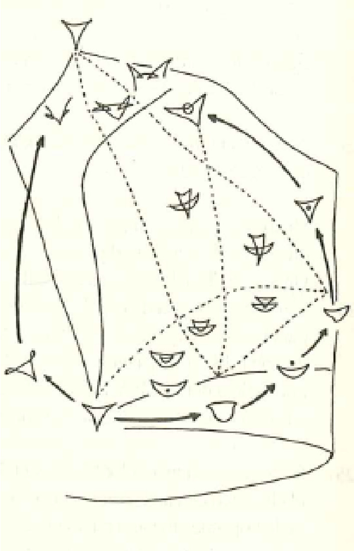


Fig. 7.10 Caminos del verbo *cavar*

- Los diferentes niveles temporales en que se muestra trabajando a los hombres: abuelo, padre, nieto-hijo.

- Los diferentes puntos de vista desde los que es observado el cuerpo -brazo, pie, muslo- y, en fin, vuelta a la mano: «entre el índice y el pulgar». Etc.

El poema de Seamus Heaney puede dividirse en tres partes. Según la técnica de *espacialización* que aquí se ensaya, hay tres *umbílicas parabólicas:* dos expuestas y desplegadas en paralelo, y una tercera dispuesta para ser desplegada por el lector activo, a imagen y semejanza de las dos primeras. Los verbos que en la figura 7.11 ponemos entre dobles corchetes son «inferidos» (en el sentido mencionado anteriormente en el apartado 7.1). Entre corchete simples se indican en inglés los verbos originales del poema.

«El padre (M_1) cava con una pala (M_2) y separa de la tierra arenisca (M_3) las patatas nuevas (M4)»

Umbílica parabólica
cavando [to dig]
Acción que se reitera: agacharse rítmicamente

Umbílica elíptica
hendir, hundir, excavar [to sink]

Umbílica hiperbólica
raspar [to rasp], arrancar [to root]
enterrar, sepultar [to bury]

↓
Cúspide
sacar, esparcir, difundir [to scatter]
recoger [to pick]
↓
Pliegue
gozar [to love]
↓
Morse
descansar, [[ser]] [to rest]

«El abuelo (M1) cava/corta con una azada (M2) y separa de la tierra mala (M3) la turba buena (M4)»

Umbílica parabólica
cavando [to dig] / cortando [to cut]
cortar, hacer muescas [to nick]
cercenar, hacer rodajas [to slice]
Acción que se reitera: volver enseguida a la tarea.

Umbílica elíptica
ahondar [to go down and down]

Umbílica hiperbólica
[[raspar [to rasp]]] [[arrancar [to root]]]

↓
Cúspide
arrojar, levantar [to heave]
[[recoger]] [to pick]
↓
Pliegue
[[gozar]] [to love]
↓
Morse
[[ser]]

«El nieto-hijo (M1) cogiendo la pluma (M2) separa de las ideas inhumanas (M3) las humanas (M4)»

Umbílica parabólica
[[escribiendo]]
Acción que se reitera: escribir texto tras texto.

Umbilica elíptica
[profundizar en el lenguaje]

Umbílica hiperbólica
[arrancar las palabras al diccionario, al idioma]

↓
Cúspide
[[realizar hallazgos verbales, sacar a luz, difundir los textos]]
↓
Pliegue
[[apreciar, acoger el público lector los textos del escritor]]
↓
Morse
[[descansar entre los dedos la pluma, herramienta para la escritura]]

Fig. 7.11 Despliegue del verbo *cavar* en el poema "Digging" de S. Heany.

Los verbos *cavar y cavar/cortar* poseen cuatro actuantes. Queremos reiterar esta característica de los verbos umbílicos parabólicos de contener los dos sentidos de las umbílicas elíptica e hiperbólica. Por definición [Caps. 4 y 6], la umbílica parabólica se reconoce por contener los dos sentidos, el elíptico y el hiperbólico. El elíptico: agresivo, penetrante y puntiagudo; el hiperbólico: suave, receptivo y romo. Si el primero perfora, es decir, atraviesa un obstáculo, el segundo suaviza, redondea. No estamos inventando esta interpretación. En el *Diccionario* de María Moliner se define *cavar* con esta misma ambigüedad: "Abrir o remover *la tierra con la azada o herramienta semejante para cultivarla".* La ambigüedad de la disyunción es bien evidente: por una parte, significa *abrir,* que es una acción de penetración, de ruptura; por otra, *remover,* que es una acción no agresiva, suave, etc.

La función de verbos como *agacharse (rítmicamente), o volver (en seguida a la tarea)...* sólo poseen el sentido de reiterar la acción del verbo principal: *cavar.*

Y, en fin, los verbos de tipo *cúspide -sacar, recoger-* y de tipo *pliegue-acariciar-,* nos conducen hacia la estabilidad del *ser.*

La tercera de las partes queda ahora en manos del lector: él es quien debe poner los verbos adecuados en los lugares regidos por el despliegue de *cavar y cortar.* El «hijo-nieto-escritor» se compara con el «padre-abuelo-trabajador», y, si el lector acepta la pertinencia de esta comparación, habrá de aceptar, por tanto, sus consecuencias semánticas: la parte final del poema no podrá ser fruto de una caprichosa «recepción». Las dos primeras partes conforman una espacialización del Sentido, constriñen de tal manera el Significado, que no deja lugar a la arbitraria lectura del mismo.

El arquetipo «umbílica elíptica» y sus proyecciones: $x^2y-y^i+a(y^2+x^2)+bx+cy$

(...)

sigue cayendo todo lo que era humano, cierto y frágil
lo mismo que una niña de seis años que llorara durmiendo,
sigue *cayendo,*

sigue *cayendo* todo,
como una araña a la que tú vieras *caer,*
a la que vieras tú cayendo siempre,
a la que vieras tú mismo,
tú tristemente mismo,
a la que vieras tú cayendo hasta *arañarte* en

la pupila con sus patas velludas
y allí la vieras toda,
toda solteramente *siendo* araña,
y después la sintieras *penetrarte* en el ojo,
y después la sintieras caminar hacia adentro,
hacia dentro de ti, *caminando* y *llenándote,*
llenándote de araña,
y comprobaras que estabas *siendo su camino*
porque cegabas de ella,
y todavía después la *sintieras* igual,
igual que rota
y todavía...

* * *

La *umbílica elíptica* se entenderá, de la misma manera que la *umbílica hiperbólica,* bajo la hipótesis de la deformación de la *umbílica parabólica.* Se conside-ran los tres mínimos conectados a través del punto silla, así que los mínimos se influyen entre sí, por medio de este punto singular.

El proceso que representa la elíptica es menos dramático que los procesos de *emisión* («mariposa») o de *captura* («cúspide»), porque no es tan inmediato y, por tanto, ni tan grosero ni tan violen-to. Existe mayor complejidad y mayor número de matices.

Estos versos de Rosales pueden servirnos para poner de relieve una característica a la que no se ha hecho mención en este ensayo, pero que es muy relevante en la Topología. Como las singularidades, por así decir, no tienen un arriba o un abajo, cada singularidad puede manifestar dos formas diferentes, una inversa de la otra, una positiva y otra negativa, por ejemplo. Thom lleva a cabo una interpretación semántica, proponiendo dos sentidos de la acción verbal: uno «constructivo» y otro «destructivo». Por ejemplo, las *cúspides* [Fig. 5.8]: *emitir / capturar.* En el poema reseñado ambas significaciones están presentes: *penetrar/rellenar.*

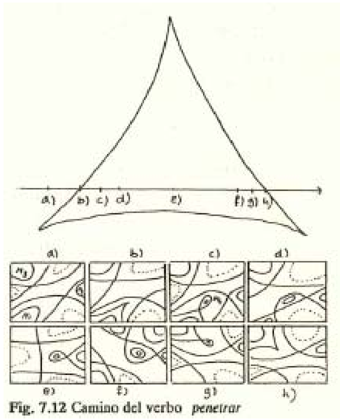


Fig. 7.12 Camino del verbo *penetrar*

Podríamos decir que el poema, desde un punto de vista topológico, recorre las dos maneras de la acción, cuyo arquetipo es la umbílica elíptica: *penetrar* y *llenar.* Si se «penetra», puede rellenarse» con algo; y si algo es «llenado», previamente ha de haber sido construida la cavidad.

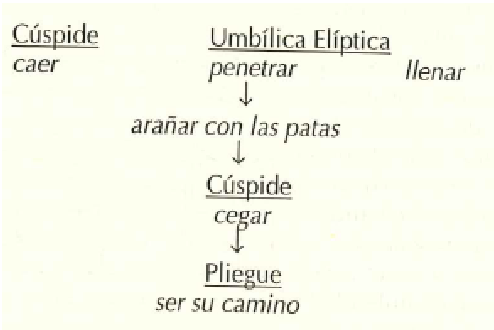
El fragmento seleccionado se abre, en todo caso, con un verbo *pliegue: caer.* Todo *cae:* la nieve, lo que era Europa, lo que nació de todos, etc. Hasta la araña que cae. Esta singularidad simple da paso, en ese momento, a una singularidad más rica en actuantes. La araña emite un mensaje al ojo, ayudado por un instrumento que son sus patas; estos actuantes quedan regidos inmediatamente por el verbo *penetrar.*

«La araña M_1 penetra en la pupila del ojo $M_{2.}$ mediante arañazos M_3, realizados con sus patas M_4».

A la vez que es penetrada, la pupila del ojo es *llenada:*

«La pupila M_2 se llena de araña M1 mediante su caminar M_3, realizado hacia dentro con sus patas M_4».

El despliegue del verbo *penetrar* tendría esta estructura:



El arquetipo «umbílica hiperbólica» y sus proyecciones: $x^2y+y^i+a(y^2-x^2)+bx+cy$

¡Qué nadar! Algas, vivas
indecisas miradas.
¡Agua mía, si helada,
aguzándome siempre!

¿Note clavo? ¿No sientes
que un trayecto, una herida
-¡qué lanzada! -en tu pecho,
agua verde, te dejo?
Con justeza te *hiendo,*
agua suya, y *palpitas,*
en tu pecho, mar grande,
en tu carne clavado.

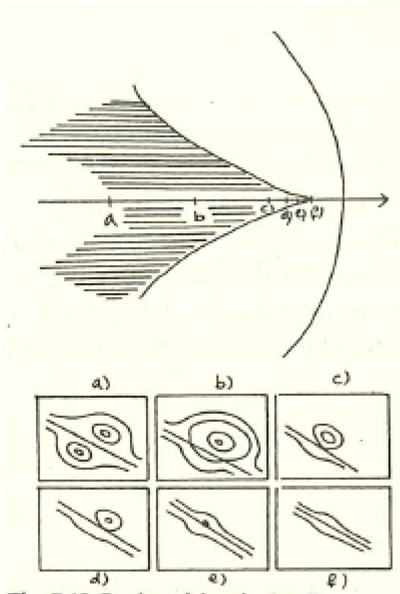


Fig. 7.13 Caminos del verbo *hendir*

Sin sangrar. Las espumas
te *resbalan,* qué piel,
qué agonía, y me *guardas*
en tu inmenso destino,

oh pasión, oh mar cárdeno.
Yerto. Cesa tu aliento,
desfalleces, mar último,
y te olvidas de todo
para *ser,* sólo *estar.*
¡Y qué muerto! Tu verde
en profundo, *reposa*
hasta el lento horizonte,
que te cierra parado.

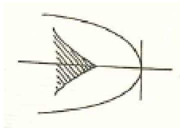
En la oríllate miro,
oh cadáver, mar mío,
y te peso despacio
en tu carne, y mis labios
alzo fríos y secos.

La *umbílica hiperbólica* se ejemplifica con un poema de Aleixan-dre que, podría decirse con justeza, *define* uno de los caminos más relevantes de su espacio de control: aquel que puede interpretarse como el «rompimiento de una ola».

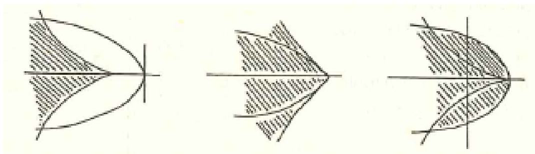
El poema describe, precisamente, el sentido mismo de la *umbílica hiperbólica,* la acción que lleva a cabo una ola al romperse, como metáfora del amor que siente el poeta. Podría dar la impresión de que volvemos a la situación de la *cola de milano,* que requería de un análisis metalingüístico. Pero, en esta ocasión, no se encuentra el nombre de la acción (en aquel caso, el verbo *suicidarse),* sino la acción misma: *hendir* [Fig. 7.13].

Podríamos parafrasear este fragmento del poema a partir de la propia estructura algebraico-topológica de la umbílica hiperbólica:

Cuando en la ecuación $x^2y+y^3+a(y^2-x^2)+bx+cy$, el parámetro c toma un valor positivo, dibujando el contorno de una arista con rebotadura: que semánticamente hemos de traducir como una acción agresiva: *"¿No te clavo? ¿No sientes/ que un trayecto, una herida/ -¡qué lanzada! -en tu pecho,/agua verde, te dejoV* (vv. 5-8).



Pero este *clavar* no llega a traspasar el borde: "Sin sangrar", comenta el poeta. Porque al alcanzar un límite, digamos c = 0, entonces la arista de rebotadura, va tomando forma redondeada: "Las espumas te *resbalan...".* La rebotadura alcanza ahora la suavidad de una ola regular de contorno convexo [Cap. 2] hasta rellenar toda la curva:



Una vez estabilizada, localmente, la trayectoria y conocida ya la estructura del rompimiento de una ola, en vez de repetir ese movimiento, una posibilidad que hubiera podido contemplar el poeta-si, por ejemplo, hubiera querido exponer los múltiples intentos de llegar al objeto amado, busca la estabilidad del mar en el que hace un momento rompían las olas y, mediante proyecciones topológicas que hace corresponder con verbos de tipo *cúspide* como *guardar* y verbos de tipo *pliegue* como *cesar* y *desfallecer,* alcanza los puntos Morse -*olvidarse de todo, ser, estar*-, y queda en absoluto reposo, como un cadáver.

Los verbos se desplegarían de esta forma:

Umbílica Hiperbólica
Hendir
↓
Cúspide
Guardar
↓
Pliegue
Cesar
Desfallecer
↓
Morse
Ser, Estar
Reposar

EJERCICIOS

No se deja analizar cualquier texto por la teoría. Pero esto ocurre en todos los campos: las teorías son herramientas para tratar de comprender la realidad, para hacerla inteligible. Y se hacen fuertes en algunos terrenos, de donde resurgen con más naturalidad; eso parece ocurrirle a la poesía ante la TC. El lector intentará «ver» el proceso de *espacialización* de ciertos poemas.

1) ¿Cómo traduciríamos al lenguaje topológico el siguiente refrán?: «Cuando algo dicen, algo hay».

2) Analizar los siguientes poemas desde la TC:

a) El aire se serena
(...) Aquí la alma navega
por un mar de dulzura, y finalmente
en él ansí se anega
que ningún accidente
extraño y peregrino oye o siente.
¡Oh desmayo dichoso!
¡Oh muerte que das vida! ¡Oh dulce olvido!
¡Durase en tu reposo,
sin ser restituido
jamás a aqueste bajo y vil sentido!
FRAY LUIS DE LEÓN: A Francisco Salinas

b) A llanto nace el hombre, y entre tanto
nace con el llanto
y todas las miserias una a una,
y sin saberlo empieza la jornada
desde la primera cuna
a la postrera cama rehusada;
y las más veces, ¡oh terrible caso!

suele juntarlo todo un breve paso,
y el necio que imagina que empezaba
el camino, le acaba.
¡Dichoso el que dispuesto a pasalle,
le empieza a andar con miedo de acaballe"
QUEVEDO: Salmo 9.

c) Permanece el trote aquí,
Entre su arranque y mi mano.
Bien ceñida queda así
Su intención de ser lejano.
Porque voy en un corcel
A la maravilla fiel:
Inmóvil con todo brío.
¡Y a fuerza de cuánta calma
Tengo en bronce toda el alma,
Clara en el cielo del frío!
GUILLEN, J.: Cántico

d) La muchacha se aleja, se me pierdt
Profunda entre los árboles
Del soto,
Se sume en el terreno,
Bellísimo.
¡Cuánto lazo y enlace
Con toda la floresta, fiel nivel
De esa culminación
Regente!
Asciende mi ladera
Sin alterar su acopio de silencio.
Llamándome
Se ahonda el vallecillo.

Susurro.
En una rinconada de peñascos,
De la roca entre liqúenes y heléchos
rezuma
Con timidez un agua aparecida.
Es un surgir suavísmo de orígenes,
Que sin pausa preserva
La mansedumbre del comienzo puro:
Antes, ahora, siempre
Nacer, nacer, nacer.
Una evaporación de gracias ágiles
Domina.
Más frescor se presiente, y en su joya.
Fatal: otra doncella.

GUILLEN, J.: Cántico

e) Recuerde el alma dormida
avive el seso y despierte
contemplando
cómo se pasa la vida,
cómo se viene la muerte
tan callando;
cuan presto se va el placer,
cómo, después de acordado,
da dolor;
cómo, a nuestro parecer,
cualquiera tiempo pasado
fue mejor.

MANRIQUE, J.: Coplas a la muerte de su padre

f) La luna se rompe
entre los dientes /queda /

como una rueda mordida /y desordenada de pétalos terrosos
después de tantas mentiras/pequeñas y tristes/
el rastro se pierde y se confunde / con la misma niebla aterida
que entorpece los pasos/tras las huellas
la luna a pedazos/se desvanece".

BARCELÓ, Adriana: La luz que huye

g) Que como crin hirsuta de espantado
caballo que en los troncos secos mira
garras y dientes de tremendo lobo,
mi destrozado verso se levanta?...
Sí, pero se levanta! -a la manera
como cuando el puñal se hunde en el cuello
de la res, sube al cielo hilo de sangre-:
Sólo el amor engendra melodías".

MARTÍ, José: Versos libres

EPÍLOGO

Si el análisis realizado hasta aquí hubiese sido pertinente, si la TC ofreciese un interés semántico verdadero que llegara a sacarnos del *impasse* sintáctico al que ha conducido la Lógica en Semántica, la pregunta que nos sale al paso procede todavía del «paradigma» sintactista: ¿No estaremos, simplemente, ejemplificando en el lenguaje ordinario algunos conceptos científicos (lógicos o topológicos) de nuestro tiempo?

A principios de siglo, Russell utilizó algunas frases que hicieron época -«El actual rey de Francia es calvo», «Jorge IV deseaba saber si Scott era el autor de Waverley», etc.-, que a algunos filósofos del lenguaje les llegaron a parecer el paradigma mismo del lenguaje natural. La riqueza semántica de estas oraciones, sin embargo, es mínima, aunque sus posibilidades lógico-sintácticas fueron y son numerosas, como bien lo patentiza la abundante bibliografía sobre el tema en cuestión. Ahora podríamos encontrarnos en una situación análoga, sólo que cambiando los cultos e históricos ejemplos russellianos por otros más vulgares como «Juan envía una carta a Pedro» o bíblicos como «Eva da una manzana a Adán». La única vacuna contra este *quid pro quo* sería ampliar la cantidad de ejemplos. La Lógica ya lo hizo cumplidamente por medio del *hardware* de los ordenadores, donde ha alcanzado un máximo de rendimiento, pero sólo como Sintaxis. Mas, cuando se propone un modelo semántico, ampliar el número de ejemplos significa entrar, sin ambigüedades y con todas las consecuencias, en el lenguaje ordinario. Ahora bien, dado que estamos iniciando este camino, convendría restringir el análisis a textos algo más elaborados, literanos, poéticos, para comprobar la potencia del intento y que, además, estuviesen escritos *antes* de constituirse la teoría, con lo que se evita el riesgo de los ejemplos *ad hoc.* Esto es lo que ha pretendido hacer este estudio introductorio. Sin embargo, después de la sociología marxiana, de Popper o de Kuhn, sabemos que las teorías científicas están sobredeterminadas por componentes de muy diversa índole -económica, política, cultural, etc.-, y que, a la vez, muchos de estos conceptos reflejan conceptos científicos. Las teorías científicas ni son «partos de Zeus» ni creaciones de la nada. Enmarcadas en contextos mucho más amplios y complejos, interrelacionadas con el mundo de la técnica, del trabajo y de la experiencia ordinaria -habría que insistir en la advertencia de Thom: del lenguaje natural no se puede prescindir ni en matemáticas-, las ciencias conviven dentro de las exigencias de la época, del espíritu de los tiempos *(zeitgeist);* porque las ciencias también nacen para ayudar a resolver problemas o explicar ignorancias que es necesario superar. Y esto, parece, es lo que ha ocurrido con ciertos conceptos de los Sistemas Dinámicos, que se han utilizado, incluso definido, fuera del marco científico en el que han sido conceptualizados.

Para cerrar este itinerario del «Lenguaje» y de la «Intuición Espacial», recordaremos, a modo de ilustración, cómo han sido «intuidos» por el lenguaje literario algunos de estos conceptos de la Física de los Sistemas Cualitativos que, por tanto, están comprendidos metalingüís-ticamente.

i) El concepto de «catástrofe»

¿Acaso *no* es sorprendente que el término «catástrofe» haya sido pensado -y hasta cantado- como un proceso beneficioso, mucho antes de destacarlo así la TC? No es posible dejar de citar este fenomenal poema del Cántico de Jorge Guillen, que parece estar definiendo este nuevo matiz incorporado por Thom: la catástrofe no entendida como muerte, sino como vida:

"¿Catástrofe?
No hay catástrofe,
No hay muerte en ese derrumbe,
Tras el horizonte. Mira
Cómo un frenesí de flor
Se transforma en un despliegue
De leonadas florestas
Que todo lo dan, granates
Ya con sus derroches últimos,
Riberas del universo
Máximo.
Piso tesoros.

«Catástrofe» no significa aquí algo negativo, sino constructivo; las catástrofes son discontinuidades que no conducen ni a la destrucción ni a caos alguno, sino a morfologías plenas de sentido.

ii) El concepto (matemático) de «estabilidad estructural»

Pero no es el término «catástrofe» el único que se incorpora a esta nueva andadura. Otro concepto que pretende tomar carta de naturaleza es la exigencia de *Estabilidad morfológica.* Los intentos han sido muchos y muy controvertidos. En un mundo cultural que procede de divisiones radicales entre las apariencias y la realidad (Platón), lo terrenal y lo divino (Agustín de Hipona), lo fenoménico y lo trascendente (el noventa por ciento del pensamiento europeo vinculado -al menos por las citas- a la filosofía), una tradición que piensa la vida como lo más efímero y penoso -«el mundo es un valle de lágrimas», un «peregrinaje»- etc., cuesta todo un esfuerzo filosófico pensar «la esencia de lo fenoménico», que la ciencia pretende pensar a través del concepto de *estabilidad estructural.* Una tradición inmanentista y materialista no atomista ha realizado ese esfuerzo. Es el poeta quien, en su esfuerzo por permanecer en el ser, mejor capta ese *desiderátum.* Spinoza se hace verso en Guillen:

"*(...) Ni esbozo de ultratumba ni descenso*
Con fantasmas a cuevas infernales
Donde imperen oráculos de ayer.
Sólo sumirse en el reposo denso
De una noche sin bienes ya ni males,
Y arraigarse en el ser *y* ser. ¡ser, ser!

El poeta tantea el mundo, lo efímero, pero desea la estabilidad. A veces tenemos la impresión de que Guillen tiene presente el teorema de Morse y elimina todo lo accidental, reduce el sistema a la singularidad $V = x^2$. Se recorren y ensayan todos los ámbitos posibles, pero los verbos que la acción y la actividad exigen van remitiendo y, finalmente, sólo se pretende el ser. Vivir, sí; pero para *ser.*

iii) Bifurcaciones

La Física había sido Física de las trayectorias continuas. Las rupturas, las fracturas... sólo eran accidentes del sistema. Pero las discontinuidades empezaron también a pensarse esencialmente. Primero fue el tiempo y Borges, su poético vocero, quien trazó las estelas de distintos tiempos -convergentes, divergentes, paralelos-; puso exquisita voz a Einstein y a Bergson, y se adelantó a la formalización de la Física Cualitativa o del Caos o de los Fenómenos Expansivos:

"Me detuve, como es natural, en la frase: Dejo a los varios porvenires (no a todos) mi jardín de senderos que se bifurcan. Casi en el acto comprendí; el jardín de senderos que se bifurcan era la novela caótica; la frase varios porvenires (no a todos) me sugirió la Imagen de la bifurcación en el tiempo, no en el espacio. La relectura general de la obra confirmó esa teoría."

Pero es el privilegio del espacio respecto del tiempo lo que ahora acontece. No parece que haya duda: la escuela psicológica de la Gestalt inicia esta andadura; las hipótesis de los psicólogos y de los estudiosos de la imaginación en el sentido de la prioridad espacial sobre las representaciones del tiempo resultan claramente garantizadas. Porque, ¿acaso no es la visión espacial ya, en sí misma, un conjunto de bifurcaciones? No podemos contentarnos con el tiempo, que es de naturaleza *continua.* La sucesividad exige cortes, rupturas, entidades *discretas.* Hay que precisar el conjunto de evoluciones virtuales para lo que es necesario, a la vez, destituir el tiempo y hacer intervenir el espacio si queremos crear nuevos mundos.

Los surrealistas entendieron a la perfección esta espacialización de las rupturas y Ortega la comprendió globalmente: no sólo las bifurcaciones se encontraban dentro del cuadro, sino que el cuadro no era posible sin su propia ruptura con el mundo a través del marco:

"El cuadro, como la poesía o como la música, como toda obra de arte, es una abertura de irrealidad que se abre mágicamente en nuestro contorno real. Cuando miro esta gris pared doméstica mi actitud es forzosamente de un utilitarismo vital. Cuando

miro al cuadro ingreso en un recinto imaginario y adopto una actitud de pura contemplación. Son, pues, pared y cuadro dos mundos antagónicos y sin comunicación. De lo real a lo irreal, el espíritu da un brinco como de la vigilia al sueño."

Consideración final: Estructuralismo e Historia

Con estas reflexiones no se pretende justificar nada: sólo son impresiones en el doble sentido de algo que nos toca, nos excita da cuenta de lo que nos rodea y de algo que, más marcadamente nos deja impresionados, tocados por lo sorprendente.

¿Hasta dónde puede dar de sí este análisis semántico? No lo sabemos. Hay un problema teórico que nos parece todavía sin resolver más por razones ideológicas y políticas que intelectuales, y que es necesario abrir, explicar, desmenuzar. *Este problema teórico no es otro que el de cómo vincular el análisis estructural y el análisis histórico.* Cómo los cambios pueden darse en la estructura y cómo la estructura, siendo muy resistente, permite la historia. Estructuralismo e historicismo prolongan posiciones políticas, ideológicas y civilizatorias. La síntesis exige la fortaleza en ambas partes: a) El historicismo ha de dejar de confundir un suceso cualquiera con un hecho histórico, b) El estructuralismo ha de buscar esquematizaciones para explicar los hechos históricos. Este trabajo, aunque pueda no parecerlo, está pensado dentro de ese debate, que, no cabe duda, es uno de los problemas radicales de nuestro tiempo. Por eso sugerimos abrir un proyecto de investigación en esta línea. Podrá estudiarse formalmente la historia, y para ello, y dentro del campo de la Historia Literaria, se proponen temas de este tipo:

- La Cúspide y el pliegue en la literatura medieval.
- La épica y la umbílica elíptica.
- La Divina Comedia: las umbílicas en El Infierno dantesco.
- ¿Cúspides o mariposas en la poesía mística española? La luz y la sombra.
- La cúspide romántica y la cúspide vanguardista.
- Poesía y espacio: Magia y disposición espacial en la poesía simbolista.
- Literatura femenina en España: la umbílica hiperbólica.

Etc., etc., etc.

APÉNDICE: Símbolos Formales

A, B, C...	Conjuntos
a, b, c...	Elementos
«∈» / «∉»	Pertenencia / no pertenencia
x, y, z...	Variables para elementos: conjuntos, números...
{x| }	Conjunto de los x tales que
{ , }	Notación de conjunto finito
P, Q...	Propiedades de los conjuntos
=, ≠, $=_{def.}$	Igualdad, desigualdad, igual por definición
Ø, 0	Conjunto vacío
⊂, ⊆	Subconjuntos propio e impropio
∪	Unión
∩	Intersección
¯	Complementario
U, 1	Conjunto universal
¬	Negador
∧	Conjuntor
∨	Disyuntor
→	Condicional
P(A)	Conjunto Potencia
(x,y)	Par ordenado
A x B	Producto cartesiano
R, R′,R″, R‴, R^{iv}...	Relaciones
f: A—>B	Función f de A en B
f_1, f_2, f_3 ... fn	Funciones
N	Números naturales
n	Enésimo
n′	Sucesor de n
Z	Números Enteros
Q	Números racionales
R	Números Reales
C	Números Complejos
υ	La sucesión de los números naturales
ω	El primer conjunto bien ordenado
$\aleph_0$	Cardinalidad de los conjuntos enumerables
c	Cardinalidad de los conjuntos no-enumerables

U,V,W	Conjuntos topológicos
$\hat{U}$	Conjunto clausura
$\mathbf{R}^1,\mathbf{R}^2,\mathbf{R}^3...\mathbf{R}^n$	Configuraciones geométricas en 1,2,3...n dimensiones
adA	Puntos *adherentes*
intA	Puntos *interiores*
frA	Puntos frontera o de borde
aiA	Puntos aislados
acA	Puntos de acumulación
extA	Puntos exteriores.
E	Espacio topológico
F	Espacio funcional
M,N	Variedades
m,n	Dimensiones de los espacios y de las variedades
I	Función identidad
$\mathfrak{S}$	Totalidad Distributiva
T	Totalidad Atributiva
P(x)	Polinomio en x
F	Fuerza
V	Potencial
∇	Gradiente
SD	Sistema Dinámico
X	Proceso Interno
M	Espacio de parámetros internos
$x_1...x_n$	Parámetros internos
t	Parámetro temporal
f	Funciones diferenciables
n	Coordenadas
I	Instancia de Selección
W	Espacio de control
w	Parámetros de control
R	Conjunto abierto
q_w	Cualidades observables
K	Conjunto cerrado
Hf I x	Hessiano de la función
$Tf_{(u)}$	Serie de Taylor

BIBLIOGRAFÍA:

He restringido la bibliografía a las obras y artículos de los tres autores que se encuentran detrás de este trabajo: Rene Thom, Jean Petitot y Wolfgang Wildgen. He añadido solamente algunos trabajos propios, y otros en los que he ensayado -junto a A.J. López Cruces- la aplicación de la Teoría de las Catástrofes a la Lingüística.

PÉREZ HERRANZ,F., 1994. "El método filosófico en la obra de R.Thom", *Cuaderns de Filosofía / Ciencia,* nos 23/24, Valencia, pp. 153-161.

PÉREZ HERRANZ,F., 1994. "La Teoría de las Catástrofes de Rene Thom, nuevo contexto determinante para las ciencias morfológicas", *El Basilisco,* II[a], n[5]16, pp. 22-42.

PÉREZ HERRANZ,F., 1994. "Interpretaciones lógica y topológica de la «negación»" en MARTÍN VIDE, *C: Actas del X Congrés de Llenguatges Naturals / Llenguatges Formáis",* PPU, Barcelona, pp. 509-516.

PÉREZ HERRANZ,F., 1994. "La fundamentación lógica y la teoría de las catástrofes". *Actas del Primer Congreso Internacional de Ontología,* Publicacions de la Universitat Autónoma de Barcelona, pp. 291-302.

PÉREZ HERRANZ,F., 1995. "Descripción fenomenológica y hermenéutica matemática" en MARTÍN VIDE, C: *Actas del XI Congrés de Llenguatges Naturals / Llenguatges Formáis",* PPU, Barcelona, pp. 301-316.

PÉREZ HERRANZ,F. y LÓPEZ CRUCES,A.J., 1994. "Poemas «visualizados» a través de la teoría de las catástrofes de R. Thom", *Actas del Primer Congreso Internacional de Ontología,* Publicacions de la Universitat Autónoma de Barcelona, 1994, pp. 543-555.

PÉREZ HERRANZ,F. y LÓPEZ CRUCES,A.J., 1995. "Para una formalización «topológica» de la semántica", *Estudios de lingüística,* n- 10, Universidad de Alicante, pp. 281-314.

PETITOTJ., 1974. "Identité et catastrophes", Seminario interdisciplinario dirigido por C. Levi-Strauss. [Hay traducción castellana, "Identidad y catástrofes (topología de la diferencia)" en LÉVI-STRAUSS,C: *La identidad,* Petrel, Barcelona, 1981.

PETITOTJ., 1977(a). "Introduction á la théorie des catastrophes", *Math. Sci. hum.,* n- 59, École des Hautes Études en Sciences Sociales, París.

PETITOTJ., 1977(b). "Cartographie élémentaire (en guise de introduction)", *Math Sci. Hum,* n[s] 59.

PETITOTJ., 1977(c). "Topologie du Carré Sémiotique", *Études Littéraires,* Université de Laval, Québec.

PETITOTJ., 1978(a). "Caustiques et catastrophes", *Math. Sci. hum.,* n°64, E.H.E.S.S., París.

PETITOTJ., 1978(b). "Sur le modele historique de Thom-Pomian", *Math. Sci. hum., n[Q]* 64, E.H.E.S.S., París, pp. 43-70.

PETITOTJ., 1979(c). "Hypothése localiste et Théorie des Catastrophes", *Théories du langage, théories de l'aprentissage, le débat Chomsky-Piaget,* Le Seuil, París, pp. 516-524. [Hay traducción castellana, "Hipótesis localista y teoría de las catástrofes" en CHOMSKY,N.y PIAGETJ.: *Teorías del lenguaje / Teorías del aprendizaje,* Crítica,Barcelona, 1983, pp. 432-441.]

PETITOTJ., 1981 (a). "Psychanalyse et logique: plaidoyer pour l'impossible", Le *Lien Social,* Confrontaron, Dystique, pp. 171-234.

PETITOTJ., 1982(b). "Structuralisme et Phénoménologie: la théorie des catstrophes et la part maudite de la raison", editado en *Logos et Théorie des Catastrophes,* Patino, Genéve, 1988.

PETITOTJ., 1982(c). "Sur la signification linguistique de la théorie des catastrophes", *Math. Sci. hum.,* n[3] 79, pp. 37-74.

PETITOTJ., 1982(d). "A propos de la querelle du déterminisme: de la Théorie des Catastrophes á la Critique de la Faculté de Juger", *Traverses,* 24, pp. 134-151.

PETITOTJ., 1984(a). "A laguna do contorno: Teoria das Catástrofes e Fenomenología" en *Análise,* vol. 1, n" 1, G.E.C. Publicacoes, Lisboa, 1984.

PETITOTJ., 1985(a). *Les catastrophes de la parole. De Román Jakobson a Rene Thom,* Maloine, París.

PETITOTJ., 1985(b). *Morphogenése du sens,* Presses Universitaires de France, Paris.

PETITOTJ., 1986. "Sur les applications physiques de la théorie des catastrophes", *Documents du CAMS,* E.H.E.S.S..

PETITOTJ., 1989. "Modeles morphodynamiques pour la Grammaire cognitive et la Sémiotique moclale". *Recherches Sémiotiques / Semiotic Inquiry,* 9, pp. 17-51.

PETITOTJ., 1991 (a). "Syntaxe topologique et Grammaire cognitive", *Langages,* 103, pp. 213-282.

PETITOTJ., 1991 (b). *La philosophie transcendental et le probléme de l'objectivité,* Les Entretiens du Centre Sévres, Éditions Osiris, París.

PETITOTJ., 1992(a). *Physique du sens. De la théorie des singularités aux structures sémio-narratives,* Éditions du Centre National de la Recherche Scientifique, Paris.

PETITOTJ., 1993(a). "Phénomenologie naturalisée et Morphodynamique: la fonction cognitive du synthétique a priori", in J.M. Salanskis (éd.). *Philosophie et Sciences cognitives.* Intellectica, 17', 2, pp. 79-126.

PETITOTJ., 1993(b). "Topologie phénoménale. Sur l'actualité scientifique de la phusis phénoménologique de M. Merleau-Ponty", in F. Heidsieck (éd.), *Merleau-Ponty. Le philosophe et son langage,* 15,Vrin, Paris,, pp. 291-322.

PETITOTJ., 1994. "Morphodynamics and Attractor Suntax. Dynamical and morphological mociels for constítuency in visual perception and cognitive grammar", in T. van Celder et R. Port (éds.), *Minds as Motion,* MIT Press, Cambridge (Mass.).

PETITOTJ., 1995. "La sémiophysique: de la physique qualitative aux sciences cognitives", in M.Porte. *Passion des Formes. A Rene Thom,* ENS Éditions, ENS de Fontenay-St Cloud, pp. 499-545.

THOM,R.,1968. "Topologie et significaron", *L'Âge de la Science,* n^9 4, Dunond, Paris, pp. 1-24. (Reeditado en *Thom 1980(a), cap. X).*

THOM,R., 1970. "Topologie et Linguistique", *Essays on Topology and Related Topics,* (Vol. dedicado a C. de Rham), Springer, Berlín, Heidelberg, New-York, pp. 226-248. *(Reeditado en Thom 1980(a), cap.XI).*

THOM,R., 1971. "Le role de la topologie dans l'analyse sémantique", *Symposium de Sémantique,* Urbino, (Reeditado en Thom 1980(a), cap.X).

THOM,R., 1972(a). *Stabilité structurelle et morphogénése,* W.A. Benjamín, Inc. (Reeditado por Intereditions, Paris, 1977). [Hay traducción castellana con el título de *Estabilidad estructural y morfogénesis,* Gedisa, Barcelona, 1987].

THOM,R., 1972(b). "Langages et Catastrophes: Eléments pour une sémantique topologique, *Proceedings of Bahia Symposium for dinamical systems,* Academic Press, New-York, pp. 619-654.

THOM,R., 1973(a). "De l'lcóne au Symbole: Esquisse d'une théorie genérale du symbolisme, *Les Cahiers Internationaux du Symbolisme,* pp. 22-23. (Reeditado en Thom 1980(a), cap. XIV).

THOM,R., 1973(b). "Sur la topologie des langues naturelles: Essaí d'ínterprétation psycholinguistique, *L'Analyse formelle des Langues naturelles,* (M. Gros, M. Halle, M.P. Schützenberger, eds.), Mouton, pp. 233-248. (Reeditado en Thom 1980(a), cap. XIII).

THOM,R., 1973(c). "Un Protée de la sémantique: l'lnformation, *Colloque Unesco,* Venise (Reeditado en Thom 1980(a), cap. XV).

THOM,R., 1978(a). *Morphogénése et Imaginaire,* Ciecé 8-9, Éditions Lettres Modernes, Paris.

THOM,R., 1978(b). "La double dimensión de la Grammaire universelle", *Language Universals* (H.J. Seiler), Gunter Narr Verlag, Tübingen pp. 78-89.

THOM,R., 1979. "La genése de l'espace représentatif selon Piaget", *Théories du langage, théories de l'apprentissage, le débat Chomsky Piaget,* Le Seuil, Paris, pp. 503-509. [Hay traducción castellana, "La génesis del espacio representativo según Piaget", *Teorías del lenguaje/Teorías del aprendizaje,* Crítica, Barcelona, 1983, pp. 423-431.]

THOM,R., 1980(a). *Modeles mathématiques de la morphogénése,* nueva edición revisada y aumentada, Ch. Bourgois, París, 19802. (La primera edición, Union genérale d'éditions, col «10/18», n-807,1974).

THOM,R.: 1980(b). "Prédication et Grammaire universelle, *Fundamenta Scientiae,* 1, Pergamon Press, pp. 23-34.

THOM,R.: 1980(c). *Parabole e Catástrofe,* (G. Giorello), II Saggiatore, nMilán. [Hay traducciones castellana, *Parábolas y Catástrofes,* Tusquets, Barcelona, 1985; y francesa, Flammarion, Paris, 1983.]

THOM,R., 1980(d): "Analogie et Catastrophes", *Actes du He Congrés de l'lnternational Association forSemiotic Studies,* Vienne.

THOM,R., 1980(e). "L'espace et les signes", *Semiótica,* 29 3/4, pp.193-208.

THOM,R., 1981 (a). "Morphologie du Sémiotique", *Recherches Sémiotiques/Semiotic Inquiry,* 1, 4, pp. 301-309, (Reeditado en Thom 1990(a)).

THOM,R., 1981 (b). "Teoría de Catástrofes y Ciencias Sociales: una entrevista con Rene Thom" (realizada por J.L. Rodríguez Hiera), *El Basilisco,* n^s 13, noviembre, 1981 -junio 1982.

THOM,R.: 1983(a). "Le probléme des ontologies regionales en science", *Philosophie et Culture. Actes du XVIIe Congrés Mondial de Philosophie,* Éditions Montmorency, 1986 (Reeditado en Thom 1990(a)).

THOM,R., 1983(b). "Contribution" á la *Conference on Language Invariants and Mental Operations,* Gummersbach, Université de Cologne.

THOM,R., 1884. "L'interprétation des morphologies spatio-temporelles", *Helvetia Physica Acta,* vol, 57.

THOM,R., 1986. "Conocimiento y metáfora", *Cuadernos del Norte,* n"35, pp. 10-13.

THOM,R., 1988. *Esquisse d'une Sémiophysique,* InterÉditions, París [Hay traducción castellana, *Esbozo de una Semiofísica.* Física aristotélica y teoría de las catástrofes, con "Comentarios y discusión con B. Pinchard", Gedisa, Barcelona, 1990.]

THOM,R., 1990. *Apologie du logos,* Hachette, Paris.

THOM,R., 1993. "L'idée de référentiel et le topos aristotelicien", *First Internacional Congress of Ontology. «Categories and global intelligibility»,* San Sebastián, 21 de abril.

WILDGEN,W., 1981. "Archetypal Dynamics in Word Semántica: An appication of Catastrophe Theory" en *Words, Worlds and Contexts,*H.j. Eikmeyer y H. Reiser, New Jork.

WILDCEN,W., 1982, *Catastrophe Theoretic Semantics. An Elaboration and Application of Rene Thom's theory,* Benjamín, Amsterdam.

WILDGEN,W., 1994. "Realistic Semantics and the Multistabilitity of Meanning", *Cognitive Linguistics & Semiotics. International Symposium.*