Preámbulo a un análisis de la relevancia de los estudios de Ernst Kummer sobre factorización para la historia de las teorías del lenguaje

Javier Arias Navarro
Centro de Linguística da Universidade de Lisboa
Escuela de Lógica, Lingüística y Artes del Lenguaje de Asturias

Nota preliminar

Las cuestiones tratadas en el presente trabajo constituyen tan sólo una pequeña parte de las que el autor ha resuelto ya en una serie de textos de próxima publicación, temáticamente entrelazados entre sí. Se pretende en ellos mostrar cómo la teoría del lenguaje y la lingüística general deben tener en cuenta ciertos teoremas matemáticos, so pena de que estos le estallen, si no, en la cara, y le embadurnen la dignidad intelectual que con tanto esfuerzo lograron establecer unas pocas mentes preclaras de De Saussure para acá. En cierto sentido, el caso — si quiere, puede el lector llamarlo privilegiado — que ilustramos con Kummer es sólo un epifenómeno de un problema más general atinente a la relación de las estructuras matemáticas con el lenguaje mismo (asunto que, como no nos cansamos de repetir una y otra vez, debe distinguirse meridianamente de lo que hace al uso de aparato e instrumental matemático en la descripción y / o explicación lingüísticas). Relaciones matemáticas ínsitas en él.

Introducción

El surgimiento de algunas de las teorías del lenguaje más señaladas del siglo XX no puede entenderse sin acudir a las ideas matemáticas que las nutren. Sucede, sin embargo, que éstas se encuentran no pocas veces entre los lingüistas de modo latente y, cuando se manifiestan, lo hacen ya insertas en un cuerpo de axiomas y principios que se mencionan siempre de pasada y dándolos por sentados ya en otra parte. Es esa remisión perpetua a otra instancia explicativa, como en el aplazamiento indefinido que sufre el Joseph K. de *Der Prozeβ* de Franz Kafka, forma moderna y más sutil del *Doctores tiene la Santa Madre Iglesia que os sabrán responder*, siendo, como ya notara Unamuno, que el cabo nada saben ni responden, lo que dispara la sospecha de la razón filológica, siempre dispuesta a meter la nariz y enterarse de más hurgando entre los papeles arrinconados por la cultura de masas a la espera de que algún anticuario o chatarrero pase a recogerlos. Pero entre tanto y no que esto sucede, cabe aún aprender algo acudiendo a alguno de los pocos muertos vivos.

Podemos hacer nuestras, para el propósito de fundamentación (conceptual, no simple arqueología ni estandarte de vana reivindicación histórica) de la lingüística que aquí nos concierne, las palabras de Michael Dummett sobre Frege:

> "He knew very well that, in mathematics as opposed to architecture, the construction of the foundations occurred at a late stage in the development of a theory: it is the culmination of the process of rendering it fully rigorous. What, on his view, demands acknowledgement is that an analysis of the general form of the applications of a theory is the proper business of mathematics; no other science is competent to undertake it, so that, while it remains undone, the mathematical theory has not yet been supplied with adequate foundations. If, then, we hit upon an application of a type not provided for in the existing foundations of the relevant theory, we need to analyse what made that application possible, and in the light of that revise the foundational part of our theory, or prove a more general representation theorem, accordingly."[1]

El problema de la factorización: un poco de historia matemática

Como cualquiera con una mínima formación matemática sabe, los números primos han fascinado a los humanos desde tiempos inmemoriales. Ya en Grecia con la criba de Eratóstenes (276–194 a.C.) se establecieron procedimientos para la determinación de todos los primos hasta un n dado, al tiempo que se avanzaba, en los *Elementos* de Euclides (ca 325–ca. 265 a.C.), una definición que ha perdurado hasta hoy, según la cual son números primos aquellos divisibles únicamente por sí mismos y por la unidad[2]. Sin embargo, lo que a primera vista parece obvio resulta problemático una vez se somete a escrutinio. Durante siglos, la factorización de un número en sus primos se tomó como unívoca, constituyendo una hipótesis fundamental en los desarrollos de lo que hoy conocemos como teoría algebraica de números. El más célebre de todos ellos es, sin duda, el último teorema de Fermat. En los sucesivos empeños por resolver este y en las insuficiencias de ellos derivadas se reveló, sin

[1] Cf. Michael Dummett, *Frege: Philosophy of Mathematics*, Cambridge, Massachusetts, Harvard University Press, 1991, p. 295.

[2] Nos referimos aquí al primer caso en que no cabe albergar dudas en punto al conocimiento. Así, el teorema fundamental de la aritmética se deriva, como es notorio, a partir de la formulación de las proposiciones 30-32 (en que las dos últimas se deducen, cada una, de su precedente) del libro VII de Euclides. No entramos, pues, a considerar la naturaleza del saber matemático implícito en la operatividad inscrita en las tablillas de arcilla babilónicas, o hasta en los cuatro primos hallados en el hueso de Ishango, de muchos milenios antes de los primeros vestigios de escritura en nuestro mundo.

embargo, la falsedad de la hipótesis de partida. La factorización en números primos no era siempre unívoca. Las más de las veces, sí. Pero no siempre. Había, pues, que acometer una ampliación de lo que vendría a conocerse como *dominio de integridad*. Asi, Ernst Eduard Kummer (1810-1893) hubo de introducir la noción de los "números ideales" (*ideale Zahlen*, en alemán) para paliar argumentativamente la falta de una factorización única o unívoca en ciertos subanillos de los números complejos.

Dejemos que sea una de las obras de referencia inexcusable en la matemática mundial del pasado siglo XX, la enciclopedia editada por Kolmogorov (1903–1987) y colaboradores, la que nos ilustre, con tan característica como magnífica concisión, acerca del concepto de *ideal*:

> "El propio concepto de ideal surgió en relación con el problema de la unicidad de la descomposición en factores primos. Aproximadamente a mediados del pasado siglo el matemático alemán Kummer, tratando de probar la famosa proposición de Fermat de que la ecuación $x^n + y^n = z^n$ no tiene soluciones enteras para $n \geq 3$, tuvo la idea de considerar números de la forma $a_0 + a_1\zeta + \ldots + a_n\zeta^{n-1}$, donde $\zeta = \cos 2\pi/n + i \operatorname{sen} 2\pi/n$ es una solución de la ecuación $x^n = 1$ y $a_0 \ldots, a_n$ son enteros. Los números de este tipo forman un dominio de integridad, y Kummer, al principio, dio por supuesto que evidentemente se verificaba el teorema sobre la unicidad de la descomposición en factores primos en este dominio. Sobre esta base construyó una demostración del teorema de Fermat. Sin embargo, al repasar sus razonamientos observó que la suposición de la unicidad de la descomposición no es verdadera. Deseando conservar la unicidad de la descomposición en factores primos, Kummer se vio obligado a considerar descomposiciones de números del dominio en factores que no entran en el propio dominio. Llamó a estos números ideales. Posteriormente, en la construcción de la teoría general, los matemáticos introdujeron, en lugar de los números ideales, conjuntos de elementos del dominio que son divisibles por un número ideal u otro, y estos conjuntos fueron llamados ideales. El descubrimiento de la no unicidad de la descomposición en factores primos en anillos numéricos es uno de los hechos más interesantes descubiertos en el último siglo y condujo a la creación de números algebraicos." [3]

La fractura de la unicidad de la descomposición en primos se inicia, pues, con el trabajo de Kummer de 1844.[4] El reconocimiento de esta falla en el sistema, y los

[3] Cf. A.I. Maltsev "Grupos y otros sistemas algebraicos", capítulo 19 de A.D. Aleksandrov, A.N. Kolmogorov, M.A. Laurentiev y otros (eds.), *La matemática: su contenido, métodos y significado*. Madrid, Alianza Universidad, 1994 (7ª reimpr.), tomo III., §14, *Anillos*. El pasaje en cuestión se encuentra, en concreto, en el apartado que lleva por título *Propiedades aritméticas de los anillos*, p. 401-402.

[4] Cf. Ernst Eduard Kummer, "De numeris complexis, qui radicibus unitatis et numeris integris realibus constant." 1844, *Academiae Albertinae Regiomontanae secularia tertia celebranti gratulatur Academia Vratislaviensis*, Breslau, Typis Universitatis, 28 páginas. Texto reimpreso, con el solo cambio del título al

consiguientes intentos por restaurar la harmonía perdida, suponen — ya se ha dicho — el inicio de la moderna teoría algebraica de números y conducirán a sucesivas ampliaciones de su dominio, como tendremos ocasión de comprobar más adelante.

El tránsito terminológico — que lleva aparejado no pocos matices conceptuales — del 'número ideal' al 'ideal' se produce con la aparición de las *Vorlesungen über Zahlentheorie* editadas por Dedekind (1831–1916) con las contribuciones del ya entonces fallecido Dirichlet (1805–1859) y las suyas propias[5]:

---

francés "Sur les nombres complexes qui sont formés avec les nombres entiers réels et les racines de l'unité.", en *Journal de Mathématiques Pures et Apliquées* 12, 1847, p. 185-212, y, posteriormente, en la indispensable edición por parte de André Weil de los trabajos del matemático alemán (*Ernst Eduard Kummer Collected Papers*, *Volume 1: Contributions to Number Theory,* Berlin / New York, Springer-Verlag, 1975, p. 165-192). De ese mismo año, 1844, es el artículo "Über die complexen Primfactoren der Zahlen, und deren Anwendung in der Kreisteilung.", fechado a 20 de abril de 1844, y enviado a la Academia de Ciencias de Berlín al día siguiente, para acabar siendo retirado, a petición del autor, tras haberle detectado un fallo, poco después, sin llegar a ver la luz. Dicho texto no se encuentra en los *Collected Papers*: fue descubierto en 1967 por Kurt-Reinhard Biermann — autor, por lo demás, de una importante panorámica histórica en *Die Mathematik und ihre Dozenten an der Berliner Universität 1810-1933 – Stationen auf dem Wege eines mathematischen Zentrums von Weltgeltung*. Berlin, Akademie-Verlag, 1988 [2ª edición ampliada] — y publicado después por Harold M. Edwards como epílogo a su artículo "The background of Kummer's proof of Fermat's last theorem for regular primes", *Archive for History of Exact Sciences* 17 (1977), p. 381- 394 (el artículo de Edwards había aparecido en el volumen 14 de esa misma revista, número 3, septiembre de 1975, pp. 219–236). Una exégesis detallada del manuscrito la halla el lector en Reinhard Bölling, "From Reciprocity Laws to Ideal Numbers: An (Un)Known Manuscript by E.E. Kummer", en Catherine Goldstein, Norbert Schappacher, Joachim Schwermer (eds.), *The Shaping of Arithmetic after C.F. Gauss's Disquisitiones Arithmeticae* , Berlin, Springer Verlag, 2007, p. 271-290.
Sin embargo, la fecha de 1844, aludida repetidamente en la literatura — Olaf Neumann ("Über die Anstöße zu Kummers Schöpfung der 'Idealen Complexen Zahlen'" en el volumen editado por Joseph W. Dauben, *Essays on Mathematics and its Historical Development*, New York, Academic Press, 1981, p. 195) habla, sin embargo, del 18 de octubre de 1845 como el momento en que Kummer da a conocer públicamente la primera versión de la teoría de los números ideales —, no parece remontarse a ninguno de esos dos artículos, sino al epistolario de Kummer con Leopold Kronecker (1823–1891). Sea como fuere, ello no impidió, como acaso nuestro lector ya sepa, que Gabriel Lamé (1795–1870) o Augustin-Louis Cauchy (1789–1857) continuaran, todavía algunos años después, efectuando atrevidas proclamas en público defendiendo la factorización única, como nos cuenta Harold M. Edwards, en la sección §4.1 de su *Fermat's last theorem: A genetic introduction to algebraic number theory*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 50, Springer-Verlag, New York, 1977. Una de esas ocasiones fue, según sabemos, la ponencia de Lamé en la reunión del 1 de marzo de 1847 de la Academia Francesa de las Ciencias. El lector que quiera perderse en el laberinto de las idas y venidas de fechas y en el rico anecdotario a ellas ligado hará bien en consultar el ameno libro de Simon Singh, *Fermat's Enigma*, First Anchor Books, New York, 1998.
Una buena presentación de los conceptos aquí esbozados puede leerse en Israel Kleiner, *A History of Abstract Algebra*, Boston, Birkhäuser, 2007.
Para la correspondencia, véase "Briefe Ernst Eduard Kummers an seine Mutter und an Leopold Kronecker,", en Kurt Hensel, *Festschrift zur Feier des 100. Geburstages Eduard Kummers*, Leipzig / Berlin, B.G. Teubner, 1910, p. 46-102. Dichas cartas fueron reimpresas en A. Weil, *op. cit*., p. 76–132.
5 Cf. Richard Dedekind y Peter Gustav Lejeune Dirichlet, *Vorlesungen über Zahlentheorie*, 2ª ed., Braunschweig, Druck und Verlag von Friedrich Vieweg und Sohn, 1871, Supplement X ["Über die Composition der binären quadratischen Formen"]. La primera edición se publicó en 1863, sin el suplemento que aquí nos concierne.
Otra vía que se desprende del esfuerzo de Kummer,, en una dirección y sentido diferentes al desarrollo de Dedekind, la constituye la teoría de divisores de Kronecker, en la que aquí no entraremos.

> "In 1871 Richard Dedekind took Kummer's work and recast it in terms that a modern reader would recognize. He replaced Kummer's notion of "an ideal complex number" with what he called an ideal, giving the same definition of ideal that we use today. Dedekind also combined Kummer's results with work on quadratic integers, and extended these results to any ring of algebraic integers." [6]

¿En qué consiste exactamente el hallazgo de Kummer? Puede resumirse en una serie de resultados[7]: 1) probó que la factorización unívoca no rige para los denominados enteros ciclotómicos; 2) *salvó el fenómeno*, restaurando dicha factorización al introducir los números complejos ideales, precursores, como hemos visto, de los ideales de Dedekind; 3) introdujo una relación de equivalencia entre ideales, demostrando que esas clases de equivalencia forman lo que hoy en día conocemos como un grupo; 4) desarrolló el concepto de *grupo de clase ideal* y un índice de irregularidad para cuantificar la medida en que los enteros ciclotómicos distan de ser un dominio de ideales principales (DIP), y 5) probó el último teorema de Fermat para lo que parece ser un conjunto infinito de exponentes primos. Aunque todos estos puntos se encuentran estrechamente ligados entre sí, aquí nos centraremos, sobre todo, en 1) y 2). Ilustrémoslo de la manera más sencilla posible. Si tomamos, por ejemplo, el conjunto de los enteros gaussianos

$$\mathrm{Z}\,[i] = \{x + iy;\, x, y \in \mathrm{Z}\}$$

es decir, aquellos números complejos cuyas partes real e imaginaria son números enteros, estos constituyen un dominio de integridad. Los factores en que se descompone un entero gaussiano reciben el nombre de primos gaussianos[8]. En dicho dominio de enteros gaussianos rige la factorización unívoca. Sin embargo, esto no acontece con todos los subanillos de los complejos. Así, el conjunto

$$\mathrm{Z}\,[\sqrt{-5}] = \{a + b\sqrt{-5};\, a, b \in \mathrm{Z}\}$$

es, en efecto, un anillo, pero no un dominio de factorización única (DFU). Se comprueban con facilidad factorizaciones diferentes para algunos de los elementos de dicho conjunto. Así:

6 Cf. W. Ethan Duckworth, "Unique factorization in cyclotomic integers of degree seven", *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, Vol. 39, 4, June 2008, p. 474.
7 Cf. W. Ethan Duckworth, *op. cit.*, p. 474-475.
8 Por su parte, las unidades básicas de los enteros gaussianos son las raíces cuartas de 1, esto es, los números 1, i, -1, $-i$.

$6 = 2 \cdot 3$ ó $6 = 3 \cdot 2$ (el orden de colocación de los factores es irrelevante)

$$6 = (1 + \sqrt{-5})\ (1 - \sqrt{-5})$$

Los factores $(1 + \sqrt{-5})$ y $(1 - \sqrt{-5})$ refutan la hipótesis de que se pudiera tratarse de un dominio de factorización única. Ahora bien, ¿cómo cabe formalizar la diferencia entre casos como este y el de los enteros gaussianos, donde sí rige, como hemos visto, la factorización única? Puede apelarse, a tal efecto, siguiendo nociones de Kummer, a conceptos como "grupo de clase ideal (*Idealklassengruppe*) o "dominio de ideales principales" (DIP) (en alemán, *Hauptidealring*). La génesis del primer termino puede rastrearse como sigue: la noción de ideal se generaliza para obtener el conjunto de los llamados *ideales fraccionarios*. A partir de ahí se define el grupo de clase ideal h_p como el conjunto de ideales fraccionarios *modulo* los ideales principales[9]. Si el grupo de clase ideal es trivial, ello significa que se conserva la factorización única. Si no lo es, entonces su orden ofrece información específica sobre el modo en que colapsa la factorización única. El segundo término, al que ya hemos aludido más arriba, implica necesariamente una factorización sin fisuras. Ejemplos de un dominio de ideales principales lo constituyen el anillo Z de los números enteros o el anillo de los enteros gaussianos, Z [*i*]. Nótese, sin embargo, que un número primo en aquel puede no serlo en este. Así, el número 17 es primo en Z, ya que sólo es divisible por 1 y por sí mismo. Pero en Z [*i*] encontramos también la siguiente factorización:

$$17 = (1 + 4i)\ (1 - 4i)$$

Es decir, 17 deja de ser primo si lo consideramos en el conjunto de los enteros gaussianos. No sucede, empero, lo mismo con todos los números primos de Z. Baste con decir que 7 es primo tanto en Z como en Z [*i*]. ¿Hay algún criterio para saber si un primo en Z deja de serlo en el paso a Z [*i*]? Todo primo en el anillo de los enteros con la forma $4n + 1$ pierde esa condición entre los enteros gaussianos[10]; la conserva, sin embargo, todo aquel que se deje escribir como $4n + 3$. Acudiendo a los ejemplos arriba referidos, tenemos:

$$17 = 4.4 + 1$$

9 Dicho de un modo algo más formal, para un cuerpo K, se denomina grupo de clase ideal al grupo de cocientes J_K/P_K, donde J_K indica todos los ideales fraccionarios de K y P_K representa los ideales principales de K.

10 El caso de 2 es excepcional. No es un primo gaussiano, como prueba $2 = (1 + i)\ (1 - i)$, pero tampoco cabe escribirlo del modo propuesto.

$7 \quad = 4.1 + 3$

Debemos a Leonhard Euler (1707–1783) la primera prueba a este respecto. El teorema, en cambio, era conocido ya al menos desde el propio Gauss, quien introdujo lo que vendría a conocerse como enteros gaussianos en su texto de 1832 *Theoria residuorum biquadraticorum*, en el que también demostraba — acudiendo a la norma euclídea a^2+b^2, como era habitual — la factorización única en dicho anillo.

Resumiendo, un entero gaussiano $x + iy$ es un primo gaussiano si y sólo si se cumple uno de los siguientes requisitos: 1) x ó y es cero y el otro es un primo de Z con la forma ± ($4n + 3$); 2) ambos son distintos de cero y $x^2 + y^2$ es un primo de Z. La segunda condición explica que, por ejemplo $3 + 2i$ sea primo, ya que $3^2 + 2^2 = 13$, que es primo en Z.

Ante la falla que hemos visto en la factorización única, cabe decir, pues, que Kummer reaccionó introduciendo una suerte de sustituto — *Ersatz* freudiano, diría algún malpensado o descontento — para los números primos en el cuerpo ciclotómico $\mathbf{Q}(\zeta_p)$, a saber, los célebres números ideales[11].

Por último, debe mencionarse, muy brevemente, que, gracias a Kummer, comenzamos a deslindar, entre los números primos, aquellos que él denominó regulares de los restantes. 'Número primo irregular' puede definirse simplemente, de modo negativo, como todo aquel primo que no sea regular. Cabe también, sin embargo, caracterizarlo como un primo que

11 Los *enteros ciclotómicos* — de los que hizo uso Kummer en su demostración parcial del último teorema de Fermat — reciben su nombre de la ecuación en la que se basan, $x^n = 1$, conocida como ecuación ciclotómica. Las soluciones de dicha ecuación se denominan raíces de la unidad (*roots of unity*, *Einheitswurzel*). Para $n = 1$ y $n = 2$, las soluciones son obvias (1; 1 y −1 respectivamente). Conforme n aumenta, hay soluciones complejas (los denominados números DeMoivre) que también resuelven esta ecuación. Así sucede ya para $n = 3$, por extraño que pueda parecerle a primera vista al lector inadvertido. Consideremos la identidad de Euler $e^{i\pi} = -1$. Dicha identidad es un caso especial de la fórmula de Euler, la cual especifica que $e^{i\pi} = \cos x + i \operatorname{sen} x$ para cualquier número real x. Acudiendo a dicha ecuación llegamos a las tres soluciones: 1, $e^{(2i\pi)/3}$ y $e^{(4i\pi)/3}$. Dado que $(e^{(2i\pi)/3})^3 = e^{2i\pi} = (-1)^2 = 1$, resulta que la solución para cualquier valor de n es $e^{(2i\pi)/n}$. Tal solución se representa por medio de la letra griega ζ (zeta). Entonces, el conjunto de los enteros es Z[ζ], donde cada número entero puede construirse a partir de los enteros racionales a, b mediante la fórmula $a + b\zeta$. Dicha construcción obedece al mismo esquema que el de Euler para $Z[\sqrt{-3}]$ y Gauss para $Z[i]$.
Para cualquier valor n, hay n raíces de la unidad diferentes que pueden generarse mediante $e^{(2i\pi k)/n}$, donde k es cualquier entero 0, 1, 2, ..., hasta $n-1$. De ahí proviene la denominación *raíz primitiva de la unidad* para el valor ζ (igual a $e^{2i\pi/n}$). Pues bien, no resulta difícil probar que las raíces terceras o cúbicas de la unidad son 1, ω y ω^2.

presenta un índice de irregularidad positivo. En el caso de los primos regulares, el valor de dicho índice ha de ser cero. Por otro lado, mientras que se sabe que hay infinitos primos irregulares, no se ha podido probar aún que los primos regulares lo sean en número infinito. Un primo impar p tiene un índice irregular n si y sólo si hay n valores de k para los que p divide al número de Bernoulli B_{2k}, con k menor que $(p-1)/2$. Por ejemplo, el primer primo irregular con índice irregular mayor que 1 es 157, que divide a B_{62} y B_{110}, de manera que presenta un índice de irregularidad 2.

Atendamos ahora brevemente el proceder de Dedekind. Para conseguir la factorización única, en lugar de números ideales, como Kummer, considera clases de números algebraicos, a las que llama ideales, en homenaje a su predecesor. Así, por ejemplo, entre los números enteros, en lugar de 5 toma la clase $5p$, donde p es cualquier entero. Establece la divisibilidad y las operaciones entre las clases. Y define la estructura de ideal de la siguiente manera:

Un conjunto de enteros A de un cuerpo K es un ideal si para cualquier par de enteros, α, β, de A, se verifica que $a\alpha+b\beta$ (con a y b perteneciendo a K) también pertenece a A. Dedekind aplica esta noción a los números algebraicos, de modo que un ideal A se dice generado por los enteros algebraicos a_1, a_2,.., a_n, del cuerpo K si dicho A está constituido por elementos de la forma: $\lambda_1 a_1+\lambda_2 a_2+...+\lambda_n a_n$, donde los λ_i pertenecen a K.

Comunicado urgente sobre una ausencia

Comoquiera que esta es una revista en la que muchos lectores esperan dilucidaciones filosóficas de las que llevan a menudo el apellido de fenomenología, habrá, sin duda, quien, llegado a este punto, se pregunte, con razón: "¿Qué dijo de todo esto Husserl?" No me da ahora el vagar para un repaso al detalle de las decenas y decenas de sus tomos, editados algunos en vida del propio Edmund Husserl y, en cuantía aún mayor, a título póstumo, pero si acudiendo a la *Philosophie der Arithmetik*[12] no encuentro en ella nada en punto a la factorización en primos, ni en medio de toda la miríada de consideraciones más o menos psicológicas sobre la división, ni en parte otra alguna, no resulta osado aventurar que nada

12 Cf. Edmund Husserl, *Philosophie der Arithmetik*, Felix Meiner, Hamburg, 1992. La edición original data de 1891.

encontrará, a buen seguro, quien se sumerja en los miles de páginas sobre temas muy alejados del presente.

La decepción, claro, sólo puede sufrirla de veras quien confía en el peregrinaje como camino de perfección y de conocimiento, poco importa si a Santiago o a Lovaina. El resto, a quienes nos es dado, como mucho, el de Peer Gynt, no aspira a sufrir por lo que no esperaba, y ni siquiera, como al huir de la princesa Dovre, a disfrutar de lo sufrido en reluciente Nada.

Bien distinta, es por cierto, la situación si uno acude a aquella sólida arquitectura hanseática que levantaba silenciosamente Ernst Cassirer entre la Schlüterstraße y su remanso de la biblioteca de la Warburg Haus en la Heilwigstraße

> "[…] gerade die komplexen mathematischen Begriffe, die keinerlei Möglichkeit einer unmittelbaren Realisierung im Sinnlichen mehr besitzen, sind es, die im Aufbau der Mechanik und Physik fortdauernd zur Geltung kommen. Konzeptionen, die sich ihrem Ursprung und ihrer logischen Beschaffenheit nach völlig von der Anschauung trennen und sie prinzipiell überschreiten, führen zu fruchtbaren Anwendungen innerhalb der Anschauung selbst zurück. Dieses Verhältnis, das in der Analysis des Unendlichen seinen prägnantesten Ausdruck findet, bleibt dennoch nicht auf ihr Gebiet beschränkt. Selbst eine so abstrakte gedankliche Schöpfung wie das System der komplexen Zahlen liefert einen neuen Beleg dieses Zusammenhangs, wie z.B. Kummer den Gedanken durchgeführt hat, daβ die Beziehungen, die innerhalb dieses Systems obwalten, in den Verhältnissen chemischer Verbindungen ihr konkretes Substrat besitzen." [13]

La cita de Kummer, que no tiene desperdicio, es la que sigue:

> "Der chemischen Verbindung entspricht für die complexen Zahlen die Multiplication; den Elementen oder eigentlich den Atomgewichten derselben, entsprechen die Primfactoren; und die chemischen Formeln für die Zerlegung der Zahlen. Auch selbst die idealen Zahlen unserer Theorie finden sich in der Chemie, vielleicht nur allzuoft, als hypothetische Radicale, welche bisher noch nicht dargestellt worden sind, die aber, sowie die idealen Zahlen, in den Zusammensetzungen ihre Wirklichkeit haben.[…] Diese hier angedeuteten Analogieen sind nicht etwa als blosse Spiele des Witzes zu betrachten, sondern haben ihren guten Grund darin, dass die Chemie, so wie der hier behandelte Theil der Zahlentheorie, beide denselben Grundbegriff, nämlich den der

13 Cf. Ernst Cassirer, *Substanzbegriff und Funktionsbegriff*, Hamburg, Felix Meiner, 2000, p. 126. La versión original, publicada por la editora de Bruno Cassirer en Berlin, data de 1910.

Zusammensetzung, wenngleich innerhalb verschiedener Sphären des Seins, zu ihrem Principe haben."[14]

De todo lo cual concluye Cassirer:

"Ebendiese Übertragung von Gebilden, deren ganzer Inhalt aus einer Verknüpfung rein ideeller Konstruktionen stammt, auf die Sphäre des konkret-tatsächlichen Seins aber bildet das eigentliche Problem. Es zeigt sich schon hier, daβ es eine eigentümliche Verflechtung »wirklicher« und – »nichtwirklicher« Elemente ist, auf der jede naturwissenschaftliche Theorie beruht." [15]

Zellig Harris: la factorización en la lingüística estructural norteamericana

Pasemos a continuación a considerar el sentido que adopta la transferencia del concepto de factorización a la teoría del lenguaje y a la lingüística general. Para ello, nos fijamos en la obra del autor que con mayor ahínco se ha ocupado del problema, a saber, Zellig Sabbetai Harris (1909-1992), figura señera del estructuralismo norteamericano y pionero en múltiples ramas de nuestra disciplina, a las que aportó no pocos y novedosos métodos. Nuestro proceder no debiera extrañar metodológicamente a nadie que conozca un

14 Cf. Ernst Kummer, "Über die Zerlegung der aus Wurzeln der Einheit gebildeten complexen Zahlen in ihre Primfactoren", *Journal für die reine und angewandete Mathematik* 35 (1847), p. 360. Una extensión de dicha analogía puede el lector encontrarla en la página 443 del artículo de 1851 de Kummer, al que presta notable atención Barry Mazur en su reseña (*Bulletin of the American Mathematical Society*, 83, 5, 1977, p. 976-988) de la edición de los *Collected Papers* a cargo de André Weil, en cuyas páginas 977-978 nos ofrece la siguiente versión en inglés de un párrafo de la máxima relevancia:

"Ideal complex numbers are comparable to the hypothetical radicals which don't exist in themselves, but only in combinations; fluor, in particular, an element which one cannot isolate, can be compared to an ideal prime factor. The notion of equivalence of ideal factors is, at bottom, the same as that of chemical equivalence …

Comparing the methods of chemical analysis to those of decomposition of complex numbers one finds further surprising analogies. For, just as chemical reagents added to a dissolved substance yield precipitates, by means of which one determines the elements contained in the substance, so, the numbers we have denoted $\psi(\alpha)$, as reagents of complex numbers, allow one to determine the prime factors contained in complex numbers by 'putting in evidence' a prime factor q, analogous to the chemical precipitate …"

Quien crea, por lo demás, que todo esto no son sino nobles elucubraciones de comienzos del siglo pasado y de la segunda mitad del que lo precedió, al cabo hoy caducas y meras curiosidades del Club Pickwick, haría bien en consultar, por ejemplo, lo que un notable físico, docente un tiempo en el MIT, Martin H. Krieger, cuenta en su *Doing Mathematics: Convention, Subject, Calculation, Analogy*, New Jersey, World Scientific Publishing, 2003, p. 212-214 (bajo el epígrafe "Prime Factorizations and Elementary Excitations") sobre la relación entre el problema de la factorización unívoca y los hallazgos, ya desde Schultz, Mattis y Lieb en 1964, y de ahí en adelante hasta nuestros días, relativos al *lattice* del modelo de Ising como medio poblado por fermiones térmicamente excitados. No podemos, por desgracia, pararnos en este punto a ver cómo se trata, tanto en dicho ejemplo, como en el caso del lenguaje en que Harris nos guía (como Virgilio a Dante), de la correspondencia, en trance de extenderse — así en el programa de Langlands, con quien tantas semejanzas tiene el afán del lingüista estadounidense — en el camino que su estudio abre, entre la función zeta ζ (s) de Riemann y formas automórficas como las funciones theta que conocemos ya al menos desde Jacobi.

15 Cf. Ernst Cassirer, *op.cit.*, p. 126-127.

poco la obra de Harris, dado que fue él quien una vez dijo "language bears, on the face of it, the promise of mathematical treatment".[16]

Para facilitar las referencias, ordenamos sus citas con números romanos:

(I) "Sentences are shown to have, aside from certain degeneracies, a unique and computable factorization into prime sentences; equivalently, there is a recursive method for obtaining all sentences from a finite elementary subset (of assertions) by means of a relatively small set of operators. The properties of each sentence are completely accounted for by the properties of its factorization. There are also effective methods for constructing various languagelike systems with predictable properties (including languages without ambiguity, without synonyms, etc.) and for specifying the relevant differences between natural language and logic or mathematics." [17]

(II) "We can describe each proposition in English (including the carrier sentences themselves) as uniquely decomposable, i.e., factorizable, into such carrier sentences and kernel sentences, partially ordered. These carrier and kernel sentences therefore constitute the primes of the set of sentences." [18]

Como se observa, en (I) se da sentada para el lenguaje la factorización unívoca de una frase en sus elementos primitivos o primos. Las propiedades de cada frase, se nos insiste, quedan exhaustivamente agotadas por las propiedades de su factorización. Estaríamos, pues, en este punto, en un estadio análogo al previo a 1844 en la teoría de números[19]. Sin embargo,

16 Cf. Zellig Harris, "On the Mathematics of Language", en *Mélanges offerts à M.P. Schützenberger*, Éditions Hermès, Paris, 1990, p. 136.

17 Cf. Zellig Harris, *Mathematical Structures of Language*, Robert E. Krieger Publishing Company, Huntington, New York, 1979, p. 1-2. [1ª ed. de 1968 en John Wiley & Sons, Inc.]. El término *carrier* dista, por cierto, mucho de ser arbitrario. La motivación para la presencia de una categoría (C) de *carriers* en la gramática viene dada por el hecho de que las frases que podemos decir enteras, plenas o completas (*complete sentences*) requieren la presencia de un *carrier*, en tanto que los determinantes (*modifiers*) carecen de él. No podemos entrar aquí en lo que ello supone y conlleva en el plano prosódico. Baste con aludir a que sin la consideración de este nada de lo apuntado tendría siquiera sentido.

18 Cf. Zellig Harris, *op. cit.*, p. 107.

19 Pues las *degeneracies* que menciona Harris se refieren, no a resultados excepcionales que no encajen con la suposición de partida, sino, por ejemplo, a frases truncadas, incompletas, y, en general, a procesos que oscurecen la relación entre las dos caras del signo lingüístico. En el obituario que Bruce E. Nevin escribió el 29 de mayo de 1992 para www.linguistlist.org se ofrece una explicación sobre este particular, poniendo acertadamente las cosas en contexto:

"What Harris found was how this messy, inconsistent stream of words can be the product of two concurrent systems: a system of word dependencies that correlates with perceptions in a subject-matter domain such as a science subfield, and a system of reductions that changes word shapes (often to zero), motivated in part by issues en (II) se nos indica que dicha descomposición está parcialmente ordenada, como no se olvida de demostrar Zellig Harris acudiendo a la prueba de la *reductio ad absurdum* en que desembocan las derivaciones alternativas[20].

En matemáticas, dado que los factores de un entero cualquiera conmutan, no se puede hablar de un orden interno de descomposición en el que se incluyan los correspondientes primos. Esto es algo que no debe olvidarse nunca.

En (II) se postula que una lengua natural cualquiera (como el inglés mismo) puede describirse — en verdad, debe — por recurso a los elementos primos del conjunto de frases, esto es, las denominadas *kernel sentences* y *carrier sentences*. Harris intenta por todos los medios trazar con claridad las decisivas diferencias que median entre el lenguaje y las matemáticas. En este punto se aparta de la famosa tesis de Montague que da luz a la semántica formal contemporánea:

> "There is in my opinion no important theoretical difference between natural languages and the artificial languages of logicians; indeed I consider it possible to comprehend the syntax and semantics of both kinds of languages with a single natural and mathematically precise theory".[21]

---

of redundancy and efficiency and in part by historically contingent social convention. The reductions introduce degeneracies such as ambiguity and paraphrase, and otherwise obscure the correlation of form with meaning, but without destroying that correlation."
(Cf.: https://linguistlist.org/issues/3/3-445.html)

[20] Cf. Zellig Harris, *op. cit.*, p. 107. Ha de hacerse notar, sin embargo, que la traza o huella (*trace*) no puede resultar de un orden cualquiera. Exige, precisamente, que todo movimiento sea de *fronting*, *raising*, o de tipo similar. A este respecto, el lector interesado puede consultar dos trabajos nuestros: por un lado, el artículo "Some preliminaries to the study of traces in linguistics", en esta misma revista, y, por otro, el libro *La huella: un estudio de teoría lingüística*, ambos de próxima aparición. A quien lea este último se le hará evidente el porqué del uso de "traza" y "huella" como equivalentes en ciertos contextos para traducir el inglés *trace* o el alemán *Spur*.

[21] Cf. Richard Montague "Universal Grammar", 1970, *Theoria* 36 (1970), p. 373–398. El artículo fue reimpreso en Richmond Thomason (ed.): *Formal Philosophy. Selected Papers by Richard Montague.* New Haven, Yale University Press, 1974, p. 222-246. El pasaje que aquí reproducimos como cita lo encuentra el lector en la página 222 de la edición de Thomason. En verdad, la divergencia entre Harris y Montague es menor de lo que pudiera parecer en primera instancia: Harris concentra su atención, es cierto, en las diferencias entre las lenguas naturales (gramática de operadores) y los *languagelike systems*, como el cálculo de predicados, pero ambos autores coinciden en la búsqueda decidida de esa "*single natural and mathematically precise theory*" que dé cuenta del lenguaje humano. Dicha teoría no podrá ser una transferencia al objeto de estudio de un *desideratum* formal previamente delimitado, sino una formulación purificada (precisamente, con la purificación que sólo la matemática es capaz de lograr) de las propiedades que el análisis del lenguaje en sí y para sí revele indispensables:
"The interest […] is not in investigating a mathematically definable system which has some relation to language as being a generalization or a subset of it, but in formulating as a mathematical system all the properties and relations necessary and sufficient for the whole of natural language."
(Cf. Zellig Harris, *op. cit.*, p. 1)

André Lentin señaló, hace algunos años, en un breve pero importante artículo, las principales influencias matemáticas de Harris[22]. Estas se dejan ordenar en tres direcciones, como vectores que construyeran el espacio de las inquietudes de nuestro autor. En primer lugar, los consabidos Russell, Brouwer o Heyting, nombres clave en la discusión sobre los fundamentos de la matemática; de modo análogo, Harris pretendió, desde una época ya temprana, fundar la lingüística sobre bases claras y sólidas, y esa exigencia le acompañó a lo largo de su vida. En segundo lugar, con sus lecturas de Tarski, Lukasiewicz, o hasta Gödel, buscaba una solución al problema del metalenguaje. Por último, tenemos la más importante de las preocupaciones matemáticas de Harris, el álgebra. Lentin apunta a Garret Birkhoff, Saunders MacLane y Anatoly Ivanovich Maltsev como principales inspiradores de sus propósitos y sus reflexiones. En realidad, cabe situar a Harris entre los esfuerzos de recepción y asimilación de las enseñanzas de la escuela algebraica de Göttingen, asociada con la publicación, en 1930 y 1931, de los dos tomos de *Moderne Algebra* por Bartel Leendert van der Waerden, elaborando sus apuntes de las clases de Emil Artin y Emmy Noether[23]. Parte, sin embargo, del instrumental analítico del que hace uso Harris no se incluye aún en dicha obra, y remite ya, como en el caso de los *lattices*, a otro libro que marca época, como es *A Survey of Modern Algebra*, de Birkhoff y MacLane[24].

Por encima de todo destaca la noción de “sistema algebraico” que, según Lentin, Harris habría adoptado de un artículo de Maltsev de 1953 en que se acuña el término, como un conjunto de axiomas que se imponen a un sistema con dos operaciones binarias, suma y multiplicación — en verdad, a cualquier estructura anilloide —, al que se pueden trasladar la mayoría de los teoremas que rigen en teoría de grupos y de anillos[25]:

> “В настоящей заметке указываются аксиомы, налагаемые на системы с двумя бинарными операциями. Эти аксиомы заведомо выполняются как для обычных колец, так и для групп с

[22] Cf. André Lentin, “Reflections on references to mathematics in the work of Zellig Harris”, en Bruce Nevin y Stephen B. Johnson (eds.), *The Legacy of Zellig Harris: Language and information into the 21st century, vol. 2: Mathematics and computability of language*, Amsterdam / Philadelphia, John Benjamins, 2002, p. 1–9. De interés para lo aquí tratado es la página 4.

[23] Cf. Bartel Leendert van der Waerden, *Moderne Algebra. Teil I*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 33, Berlin, New York: Springer-Verlag, 1930; *Teil II*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 34, Springer-Verlag, 1931.

[24] Cf. Garret Birkhoff y Saunders MacLane, *A Survey of Modern Algebra*, Macmillan, New York 1941.

[25] Cf. André Lentin, *ibíd.* Se refiere al trabajo de А.И Мальцев (A.I. Maltsev) “Об одном классе алгебраических систем” *Успехи математических наук*, 8,1,1953, p.165-171.Un desarrollo extenso del concepto por parte del mismo autor se encuentra en la obra, de publicación póstuma, *Algebraic Systems*, New York / Heidelberg, Springer 1973.

аддитивно записываемой группо вой операцией и операцией коммутирования в качестве действия умноже ния. В то же время эти аксиомы позволяют без всяких осложнений пере нести в теорию подчиняющихся им алгебраических систем значитель ную часть теорем, имеющих аналогичные формулировки в теории групп и теории колец."[26]

A nuestro juicio, Harris presenta en los párrafos arriba señalados — como en el resto de la obra citada — una concepción harto peculiar de 'número', muy alejada de lo que por lo común se entiende bajo dicha denominación. Toma por tal a elementos del álgebra abstracta que satisfacen ciertas condiciones. En realidad, Harris lleva a cabo una generalización de la noción de 'primo' y, con ella, de 'número'. Hay que enfatizar que los elementos primos no deben confundirse con los *elementos irreducibles*. Así, en un dominio de integridad, todo número primo es irreducible, pero no cabe generalizar la proposición inversa. De hecho la identidad de 'primo' e 'irreducible' se produce tan sólo en los dominios de factorización única o, de modo más general, en los dominios DIP.

Tenemos, por tanto, los siguientes tipos de dominio: *dominio de integridad* (también denominado *dominio íntegro*, o *dominio entero*), *dominio* DIP (en ocasiones llamado *dominio de máximo común divisor*) y *dominio de factorización única*. Las relaciones lógicas entre ellos se dejan formular sin estorbos como una cadena de inclusión:

Anillos conmutativos ⊃ dominios de integridad ⊃ dominios integralmente cerrados ⊃ dominios de factorización única ⊃ dominios de ideales principales ⊃ domínios euclídeos ⊃ cuerpos

En teoría de anillos, se establece que, en un anillo conmutativo R, un elemento q de R es *irreducible* si para cualquier factorización $q=ab$ alguno de los dos factores es una unidad de dicho anillo[27]. O, dicho de otra manera, un elemento no nulo y no invertible

[26] Cf. А.И Мальцев (A.I. Maltsev), *op. cit*., p. 165.
[27] No nos detenemos aquí en el caso de los anillos de división o cuerpos no conmutativos, que presentan factorización única sólo si se satisfice dicha propiedad al nivel de los cuaterniones. De entre filólogos y lingüistas sólo al viejo maestro Agustín García Calvo le leímos algo sobre los cuaternios, al rememorar en el Ataque 13º de *Contra el Tiempo,* Zamora, Editorial Lucina, 1993, p. 223-240 (en especial, p. 232-239) la visión de William Rowan Hamilton (1805‒1865) de la Aritmética como *Science of Pure Time*, tal y como se formula en "Theory of Conjugate Functions or Algebraic Couples, with a Preliminary and Elementary Essay on Algebra as the Science of Pure Time", *Transactions of the Royal Irish Academy*, vol. 17, 1837, p. 293–422, de la cual acaso pudieran muchos que se dicen pensadores (pues esperarlo de los colegas de gremio sería ilusión infantil de mi parte) extraer provechosas enseñanzas, sobre todo en lo tocante a las tres maneras en que puede tomarse el estudio del álgebra: "*Practical*", "*Philological*" y "*Theoretical*". Estos tres enfoques se dejan, sin demasiado inconveniente, trasladar al estudio del lenguaje.

de un anillo se llama irreducible si sus únicos divisores son los elementos invertibles del anillo y sus propios asociados. Así, por ejemplo, 5 es irreducible en **Z**, ya que sus únicos divisores son 1, −1, 5 y −5. Ahora bien, a esa misma teoría de anillos debemos la creación del concepto de 'ideal primo' (*prime ideal*, *Primideal*) como generalización de 'número primo'. Fue Dedekind quien en 1871 lo definió como un ideal **p** distinto de O (anillo de enteros de un cuerpo numérico) y sin otro divisor que O y **p**. El término designa a aquellos ideales principales generados por un número primo.

Los ideales primos en Z no presentan mayor dificultad: tenemos pZ para todo primo p (y para 0). Así, $(3)=3Z=\{3z|z\in Z\}$. Para comprender de veras la necesidad que impulsó su aparición, más allá de las razones de su bautismo, debemos acudir a contextos más generales, como, por caso, el de los anillos de polinomios. Aquí nos basta con esbozar sólo unos apuntes sobre el concepto. Tomemos, por ejemplo, (7). Este ideal es el conjunto de todos los múltiplos enteros de 7, esto es: $\{\cdots,-14,-7,0,7,14,21,\cdots\}$. El motivo por el que se habla de un ideal en este caso reside en el hecho de que si se escoge cualquier número entero y se multiplica por un elemento cualquiera de ese conjunto, se obtiene necesariamente otro elemento de dicho conjunto. Ahora bien, ¿se trata, además, de un ideal primo? Para serlo, debe cumplirse que, dados dos elementos cualquiera del anillo, r y s, si $rs \in P$, entonces o bien $r \in P$ o bien $s \in P$, donde P designa al ideal. Si, por ejemplo $a\cdot b = 7\cdot c$ para a, b, $c \in$ Z, o bien 7|a, o bien 7|b, pues, de lo contrario, 7 no sería un factor del producto. Se comprueba, pues, que se trata de un ideal primo. Los ideales primos permiten, además, dividir anillos cociente por un ideal en virtud del teorema chino del resto (*Chinese remainder theorem*). Si consideramos, por caso, Z/30Z, y teniendo en cuenta que 30Z = 2Z×3Z×5Z, y que estos son coprimos dos a dos, resulta que Z/30Z ≅ Z/2Z× Z/3Z× Z/5Z.

Una buena perspectiva del recorrido histórico de la ampliación de los dominios numéricos, y de su significación teórica, la ofrece, con tino divulgador, pero sin perder con ello la necesaria exactitud, Liev Semiónovich Pontriaguin en *Generalizaciones de los números*, Moscú, Editorial URSS, 2005. En cierto sentido, puede sostenerse que la teoría del lenguaje y la lingüística general han pisado únicamente el suelo de los elementos reales — alguien diría que tan sólo el de los naturales — y aún se encuentran, como mucho, dando los primeros pasos (en una tragicómica mezcla del andar a gatas y el ir a tientas) de la extensión a dominios análogos al de los complejos o los cuaterniones. Quien quiera puede ver este trabajo como un modesto esfuerzo en dicho sentido.

Los factores ideales primos revelan así la verdadera naturaleza de los números complejos, los hacen, por así decir, transparentes, descubriendo su estructura cristalina interna, como le gustaba decir a Kummer.

Los ideales primos fueron una pieza fundamental en la estrategia de Dedekind para salvar la factorización única. En efecto, el denominado *dominio de Dedekind* se construyó históricamente al sustituir los elementos de un anillo de enteros algebraicos por ideales, y sus elementos primitivos por ideales primos. Fue, por ende, el paralelismo entre los números enteros primos y los denominados elementos primos de un anillo de enteros lo que desembocó en el uso y adopción del término *ideales primos*. Esto equivale, si bien se mira, a pasar de los números ideales en el sentido de Kummer a clases de números algebraicos *stricto sensu* (no otra cosa son los ideales primos de Dedekind en adelante).

No podemos cerrar estos párrafos sin advertir al lector — aunque a alguno pueda parecer que es tirar la piedra y esconder la mano; una justificación detallada sería tarea de años, cuando no de toda una vida — sobre lo que consideramos la línea de interpretación fundamental que debiera darse, no sólo a los esfuerzos de Harris que aquí nos convocan, sino, por extensión, a buena parte de los formalismos matemáticos de la lingüística contemporánea.

Para entender de veras lo que está en juego, no estaría de más que lingüistas, filólogos, semióticos, filósofos y todos aquellos que ocupan (y hasta usurpan) el espectro de los estudios del lenguaje consultaran — y no sólo consultaran, sino leyeran con atención, con papel y lápiz, tomando notas, una docena de veces, hasta hacerse de veras cargo del asunto — la carta que André Weil envió a su hermana desde la prisión de Rouen en 1940, donde se encontraba recluido por negarse a cumplir el servicio militar[28]. Dicha carta pretende ser una auténtica piedra Rosetta garante de la inteligibilidad entre enfoques investigadores, ya que permite traducir el lenguaje de cada una de las tres columnas que allí se presentan en el de las restantes, otorgando, con ello, sentido veraz a la analogía como forma profunda del pensamiento racional. La primera columna corresponde a la teoría transcendental (o continua)

[28] Cf. André Weil, "Une lettre et un extrait de lettre à Simone Weil", texto incluido en sus *Oeuvres Scientifiques, Collected Papers,* vol. 1, New York, Springer, 1979, p. 244-255. Parece, pues, casi un acto de suprema justicia poética que lo que después vendría a popularizarse como el programa de Langlands se iniciara con una carta de Robert Langlands al propio André Weil en enero de 1967, de la que, gracias a las maravillas de la red, podemos ofrecer aquí copia tanto manuscrita como mecanografiada;
https://publications.ias.edu/sites/default/files/handwritten-ltw.pdf
https://publications.ias.edu/sites/default/files/ltw_3.pdf

y geométrica (o topológica) de funciones algebraicas de Riemann. La segunda apunta a las funciones algebraicas de una variable, con coeficientes de un cuerpo finito más que en forma de números complejos, y puede asociarse a los nombres de Galois y Dedekind. Por último, la tercera se refiere a la teoría aritmética de números algebraicos, tal y como se entiende en Gauss y Dedekind.

En último término, el paso desde la primera columna a la tercera, previo paso por la segunda — esto es, la lectura natural según la convención de nuestra escritura (hay, como después se mencionará, otras opciones) — equivale al siempre delicado tránsito de un objeto O a una función f que se mantenga fiel a las simetrías originarias de dicho objeto:

"The classical example of going from O to f in mathematics is the Riemann zeta function, a combinatorial partition function enumerating the prime numbers, whose properties may be understood through those of the theta function, a function that exhibits automorphy. The combinatorial partition function, zeta, is transformed into the modular function, theta, by the fourier-like Mellin transform. Theta's automorphy provides for a good definition of zeta (its analytic continuation) and leads to a functional equation for zeta."[29]

Sin embargo, si atendemos a otros matices, a cada columna le corresponderían, más bien, los nombres de Dedekind, Artin y Langlands. El programa de Langlands sería, por ejemplo, el resultado de la extensión de la reciprocidad de Artin. Por 'reciprocidad' ha de entenderse, en este contexto:

> "[…] a connection between the divisibility or factoring properties of a number or a polynomial and properties of another object, here the analytic properties of a function, an "automorphic form". What would be difficult to discover by actually searching for factors, can be discovered by studying another object that proves to be rather more tractable. Analogously, were we deaf, we might discover how a drum sounded by measuring its area."[30]

Las tres columnas del esquema de André Weil reflejan los tres momentos (verdaderos cortes del instante cartesiano, podría argüirse) de la analogía, a saber: analiticidad, automorfía y asociatividad. Los flujos de sus interacciones, y el modo en que estas cristalizan, pueden representarse en forma de *quiver*. Así, el *quiver* $1 \rightarrow 2 \leftarrow 3$ correspondería al campo abierto por

[29] Cf. Martin H. Krieger, *op. cit.*, p. 195-196.
[30] Cf. Martin H. Krieger, *op. cit.*, p. 193.

el trabajo de Dedekind y Weber “Theorie der algebraischen Funktionen einer Veränderlichen”:

> “In 1882, Dedekind and Weber show how to get some of Riemann’s apparently transcendental results for algebraic functions, now algebraically and for functions whose coefficients are in any field, exploiting an analogy between Dedekind’s ideal numbers and algebraic number fields (Column 3) and algebraic functions (Column 2)”.[31]

De hecho, Weil amplía a 3 las columnas, a partir de las 2 de Felix Klein[32] — que a su vez son glosa del referido artículo de Dedekind y Weber — donde, de una parte, a la izquierda, se tiene lo *arithmetisch* y, de la otra, a la derecha, lo *funktionentheoretisch*, en el que, en definitiva, se hace explícita la analogía entre la “Zerlegung in reale und ideale Primfaktoren bzw. Einheiten” y la “Ideelle Zerlegung der Funktionen $G(\zeta,z)$ in solche Faktoren, deren jeder nur in einem Punkte der Riemannschen Fläche verschwindet bzw. In Bestandteile, die nirgends verschwinden”[33]. Fructifica, así, con el desarrollo de métodos aplicados que exploten las analogías de fondo, el enorme terreno abierto por el trabajo pionero de Kummer:

> “Für den allgemeinen Fall, welcher sich zu dem eben genannten ähnlich verhält, wie der Fall de allgemeinsten algebraischen Zahlen zu demjenigen der rationalen Zahlen, wiesen die mit bestem Erfolge in der Zahlentheorie angewandten Methoden, die sich an Kummers Schöpfung der idealen Zahlen anschließen, und der Übertragung auf die Theorie der Funktionen fähig sind, auf den richtigen Weg.”[34]

Lo aritmético, lo algebraico y lo analítico se insertan, pues, en esta analogía constructora del objeto, en la que lo combinatorio se liga a lo automórfico a través de una representación de grupo mediada por una función de partición. Falta, claro, desarrollar y hasta agotar la analogía, en cada una de sus vertientes (diferentes lenguajes en que ha venido a

[31] Cf. Martin H. Krieger, *op. cit.*, p. 223.
[32] Cf. Felix Klein, *Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert*, Berlin, Springer, tomo 1, 1979 [La edición original data de 1926]. Para Klein se trataba ni más ni menos que de salvar a la Ciencia de una muerte segura víctima de la babelización: “Es geht dann wie bei dem Turmbau von Babel, daβ sich die verschiedenen Sprachen bald nicht mehr verstehen ” (cf. Felix Klein, *op. cit.*, p 327).
[33] Cf. Felix Klein, *op. cit.*, p 324.
[34] Cf. Richard Dedekind y Heinrich Weber, “Theorie der algebraischen Funktionen einer Veränderlichen”, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 92, 1882, p. 181–290. La cita corresponde a las páginas 181-182.

parar el objeto originario, del que poco parecíamos saber), así como avanzar las tareas de traducción y cifrado[35].

Ni que decir tiene que un autor no tiene por qué asentarse sólo en uno de los momentos del esquema, sino que puede estar a caballo entre (al menos) dos columnas, con un pie en cada cual, por así decir. Y ello, con independencia de su "conciencia de clase", si se nos permite la ironía. Así, volviendo al estudio del lenguaje, Zellig Harris ha dado en algunos frentes ya el paso a la tercera columna, pero en ciertos aspectos — el tratamiento de la huella o *trace* aún como depósito físico — se mantiene en la segunda. También los autores y programas de investigación lingüística más exitosos hoy en día, que se presentan como un prodigio de coherencia interna, son mucho más "modulares" de lo que les gustaría creer.

(III) "One can investigate the properties of the decomposition into primes, for all sentences, or for those in distinguished subsets. It is of interest to see how the differences between decomposition into primes here and those in the set of natural numbers relate to the great differences between the set of sentences and the set of numbers, or to the differences between the algebraic structures that can be usefully defined on each of these sets. In the set of sentences, the number of primes is finite; neither the primes nor the sentences as a whole are ordered, in any relevant way that has been noted so far. Furthermore, the decompositions of sentences are partially ordered, and the requirement of matching the resultant and the argument of successive primes (operators) in a decomposition means that certain combinations of primes do not occur in any decomposition, i.e., do not make a sentence. Thus we have decompositions containing kernel primes and carrier primes (as in the example above)[36], and carrier primes alone (as in *I know that the latter is only because of the former*) and one kernel prime alone (as in *A boy walked*)."[37]

El párrafo consignado en (III) es, a nuestro entender, crucial, pues en él se muestran los límites de la analogía subyacente al empleo del término "factorización" en lingüística. Las diferencias entre el conjunto de frases y el conjunto de números remiten, en último término,

[35] Algo de eso anticipa ya Emmy Noether, en su "Erläuterungen zur vorstehenden Abhandlung" en la edición, a cargo de Robert Fricke, la propia Emmy Noether y Øystein Ore de los *Gesammelte mathematische Werke* de R. Dedekind, tomo 1, Braunschweig, Vieweg, 1930, p. 350.

[36] Se trata de la descomposición de "*A young boy's beginning to walk is slow*". Cf. Zellig Harris, *op*. *cit*. p. 107.
[37] Cf. Zellig Harris, *op*. *cit*. p. 108.

dice Harris, a las diferencias entre las estructuras algebraicas que cabe definir para cada uno de ellos. ¿Cuáles son esas estructuras? En el primer caso, el del conjunto de frases, parece tratarse de algo semejante a un anillo cuya estructura multiplicativa (*modulo* unidades) es isomorfo a $(\mathbb{N}^n,+)$ para un n finito; en el segundo, el del conjunto de números, tenemos el consabido semigrupo aditivo asociativo con elemento neutro 0 y semigrupo multiplicativo asociativo con elemento neutro 1. A dicha diferencia se añade otra relativa a los dos tipos de 'primos', a saber, *carriers* y *kernels*. Al habérnoslas con el lenguaje tenemos, según Harris, y a diferencia de lo que sucede en matemática (donde, a tal efecto, cabría, como mucho, apelar al contraste entre primos regulares e irregulares), tres tipos de descomposición, a saber, la que consiste en *kernels* y *carriers*, la que contiene únicamente *carriers* y, por último, la que presenta un *kernel* y nada más.

(IV) "But no sentence contains more than one kernel prime without also containing a carrier prime of the ϕ_c type for each kernel prime after the first. These restrictions on the combinability of primes may be varied in interesting ways, or eliminated, for suitable subsets of the setoff sentences (e.g. all sentences containing only one kernel sentence), or for certain altered definitions of the primes. For an example of the latter, the carrier primes for ϕ_c could be based on a unary rather than binary treatment of ϕ_c. Then, instead of B, C, D above we would have B*, *The same is young*, as carrier for *wh-* plus any sentence of the form *N is young*."[38]

Tenemos, según (IV), que para un número $n > 2$ de *kernels* (k_1, k_2, k_3, …, k_n), ordenados, hay un número $n-1$ de *carriers* c_2, c_3, c_4…c_n distribuidos de manera regular, en forma de aplicación biyectiva, comenzando por k_2. Dichas restricciones pueden, sin embargo, modificarse (¿conforme a una lógica, acaso, no muy distinta de la de la neutralización en fonología?) y hasta eliminarse, cuando se trata de ciertos subconjuntos, como el de todas las frases que contienen un solo *kernel*. Además, cabe, al mismo efecto, alterar la definición de algunos elementos primos. Así, según indica Harris, es posible que un conector ϕ_c pueda pasar de tomarse como binario a unario: tal sucede — interpretamos nosotros — al decir "*Because I say so*" o "*And that was the end*".

[38] Cf. Zellig Harris, *op. cit.* p. 108. Las letras mayúsculas denotan aquí los diferentes elementos primos (*kernels* y *carriers*) del enunciado considerado, parcialmente ordenados con arreglo a la convención del alfabeto.

(V) "Various subsets of sentences can be defined in respect to decomposition. For example, we can consider the set of sentences modulo their first kernel prime: i.e., all sentences whose first prime is, say, *A boy walked*; then all whose first prime is *A man walked*; etc. Any two such subsets whose first kernel prime is of the same kernel type (e.g., *NtV*, *NtVN* of particular word subclasses, etc.) will contain the same decompositions; there will be an isomorphism of the first subset onto the second preserving carrier products."[39]

En (V) se nos aporta un argumento adicional: es posible definir subconjuntos con respecto a su descomposición (o factorización), a saber, de puede determinar, por caso, el conjunto de frases que comparten su primer primo. De aquí se deriva una propiedad fundamental: la conservación de los productos de *carriers* — los productos analógicos serían, más bien, hasta donde entendemos, una suerte de extensión de Galois. En verdad, se trata de un isomorfismo entre el primer subconjunto ordenado y el segundo[40]. Si bien se mira, el establecimiento de dichos subconjuntos recuerda al conjunto de enteros englobados en un ideal. El proceder estratégico tiene, por lo demás, no pocas similitudes con el que lleva a jugar con los números primos insertándolos en diferentes categorías (regulares, irregulares, de Pierpont, etc).

(VI) "We have seen that each sentence has a partially ordered decomposition into elements, which may be taken either as prime sentences or else as base operators and kernel sentences. The decomposition is unique for each proposition, if the analogic transformations are taken as single elements. There are certain restrictions on the combinations of primes, or of ϕ, that occur in a decomposition; certain combinations occur in no decomposition.

> With the elements taken as kernel sentences, unary and binary base operators, and analogic transformations, each proposition of the language can be written uniquely as a sequence of element symbols requiring no parentheses, for example in the manner of Polish notation in logic. Certain subsequences are commutative (representing elements unordered in respect to each other)."[41]

---

[39] Cf. Zellig Harris, *op. cit*. p. 108-109.

[40] Entendiendo que un *isomorfismo* entre dos conjuntos ordenados $(P, \leq)$ y $(Q, \leq')$ es una función biyectiva $h: P \to Q$ tal que para todo $p_1, p_2 \in P$ se tiene que $p_1 \leq p_2$, si y sólo si $h(p_1) \leq' h(p_2)$.

[41] Cf. Zellig Harris, *op. cit*., p. 109. Tenemos, por cierto, aunque Harris no lo diga, una razón práctica para usar la notación polaca inversa o postfija, en vez de la infija o la prefija. Para cualquier árbol de operaciones, hay siempre al menos una secuencia postfija que se puede evaluar con el uso más sencillo posible de memoria: tan solo un *stack* en el que se consultan los dos elementos superiores. No se requiere nada más. En las otras notaciones, hay que permitir acceso a elementos inferiores, previamente depositados. Ese es el motivo por el que

En (VI), tras insistirse nuevamente en el carácter parcialmente ordenado de la descomposición de una frase en sus elementos primos, se subraya la unicidad de dicha factorización siempre que se cumpla un requisito, a saber, el de tomar las transformaciones analógicas como un único elemento. ¿Qué quiere decir esto? Para Harris, las transformaciones analógicas son productos de las transformaciones de base[42]. Dos ejemplos señalados de transformaciones analógicas los constituyen las transformaciones de voz media y de voz pasiva.

> "[…] if a transformational relation exists between two sentence forms $A(x_1)$ $B(x_1)$ which contain some subclass x_1 of a word class x, then given the same sentence form $A(x_2)$ of a similar subclass x_2 of x, it is possible to obtain $B(x_2)$." [43]

Cabe preguntarse a qué equivalen las restricciones de *well-formedness* responsables de la limitación de la composibilidad (en sentido leibniziano) de los elementos primitivos (o primos) o, también, de las aplicaciones u operadores ϕ . La respuesta más razonable es, a nuestro juicio, la que a renglón seguido esbozamos.

Resulta obvio que no cabe una simple traducción de dichas restricciones a términos numéricos, dado que, como ya sabemos y hemos indicado en las páginas precedentes, la disposición u ordenación relativa de los factores primos de un entero resulta indiferente. Sabemos, sin embargo, que las estructuras algebraicas pueden coexistir — de hecho, lo hacen a cada paso — con, digámoslo así, trozos o pedazos de estructura de naturaleza no algebraica, como una topología o (de suma relevancia para los estudiosos del lenguaje) un orden parcial[44]. A dicha estructura adicional — superpuesta, podría alguien decir — sólo se le exige ser compatible con la estructura algebraica. De ese juego mutuo se derivan las restricciones aquí consideradas. Cabría discutir otras, que remiten al modo en que se empaqueta la información en las lenguas humanas, pero con ello excederíamos los límites del presente escrito.

antiguamente una calculadora de notación infija tenía un límite de paréntesis abiertos, mientras que una postfija carecía de él, sólo precisaba de un *stack* suficientemente profundo.

[42] Cf. Zellig Harris, *op. cit.*, p. 57, nota 4: "[…] most of the problems of restricted domains apply to an aberrant case: the analogic transformations. These domains are partly due to the composition of these analogic transformations as products of the base transformations."

[43] Cf. Zellig Harris, *op. cit.*, p. 96.

[44] Esta imaginería del fragmento no debiera sorprender, ni menos aún escandalizar, a ningún estudioso del lenguaje ahora que en el programa minimista se ha puesto de moda hablar de *snapshots of structure*.

(VII) "A major advantage of the unique base-transformational decomposition is that language is characterizable by a Markov chain of ϕ (or f), whereas no Markov characterization of language in terms of words or nontransformational entities is possible." [45]

Tal y como se afirma en (VII), la dicotomía base-transformación es la garante de la factorización o descomposición univoca en el lenguaje humano, y, con ello, de un tratamiento en cadenas de Markov para los operadores ϕ (o funciones f). Las críticas como la de *Syntactic Structures*[46], en que se prueba que "*English is not a finite state language*"[47], se refieren, precisamente, a una caracterización en constituyentes no transformacionales — como en el caso de una máquina produciendo una palabra en cada estado, que se suma a las precedentes, con el añadido de bucles cerrados—, no al escenario aquí descrito.

No es lugar este para ocuparnos de la provisión adicional formulada en (VIII):

(VIII) "In order to have all denumerable material in language come only from unbounded iterations of operators, it is necessary to obtain the words for the numbers from a finite word set (containing only *one*) and from iterations of *and* on sentences containing the word *one*." [48]

[45] Cf. Zellig Harris, *op. cit.*, p. 205.
[46] Cf. Noam Chomsky, *Syntactic Structures*, Mouton, The Hague, 1957, p. 18-21 [14ªedición, 1985].
[47] Cf. Noam Chomsky, *op. cit.*, p. 21.
[48] Cf. Zellig Harris, *op. cit.*, p. 205-206. En relación con el estatuto de la regla aritmética del "+ 1", véase Agustín García Calvo, *Del lenguaje*, Madrid, Editorial Lucina, 1979, p. 17-19, donde se formula con especial crudeza el dilema al que se ven abocados los números cuando se piensa, para ellos, a fondo la relación entre aparato o sistema y producciones concretas del mismo. Para muestra, un botón:
"[…] parece que quedan condenados a un dilema: o son, por el procedimiento que sea, en número finito, de modo que tenga sentido decir de ellos "todos", y entonces la relación 'precedente-sucesor' es una verdadera relación en el aparato y la regla de "+ 1" una verdadera regla, pero entonces el sistema de la Aritmética no puede pretender producir fórmulas sin fin y no previstas, ya que, como en cualquier sistema de lenguaje formalizado, todas las producciones posibles están integradas en el aparato mismo; o bien deciden no ser en número finito, ser de verdad sin fin, de modo que no tenga sentido decir de ellos "todos", y entonces el sistema de los números vuelve a quedar dentro del sistema, no cerrado ni finito, del lenguaje natural en el que naciera, pero entonces la relación de sucesión no es una verdadera relación en el aparato; ya que parece inherente a los lenguajes no formalizados que un elemento del aparato no pueda estar definido por las condiciones de su producción en el discurso."
(Cf. Agustin Garcia Calvo, *op. cit.*, p. 19)

Basta sólo con decir que se corresponde con el segundo axioma de Peano (1858–1932), y con las *Grundgesetze* de Frege (1848–1925) sobre los números cardinales.[49]

Sí puede resultar de interés, sin embargo, que le adelantemos al lector, de cara a futuros trabajos — por si estos llegaren a escribirse —, que al elaborar su teoría de los sublenguajes (que incluye, como caso egregio, los de la ciencia) Harris se apoya, precisamente, en el concepto de 'ideal' del álgebra abstracta. En concreto, define la relación de ciertos sublenguajes con el lenguaje en términos de un ideal a la derecha respecto a un anillo.[50].

Breve apéndice sobre factorización de grafos

Convendrá apuntar, como cierre del presente escrito, que el problema de la factorización excede el campo, no precisamente estrecho, de la teoría (algebraica) de números. En el urbanismo matemático lo que sucede en un barrio o bloque de edificios acostumbra a encontrar eco inmediato en otra área de la ciudad, habitada por vecinos muy distintos, y con la que no cabía sospechar parentesco o cercanía alguna. Nada hay más alejado de la abstracción matemática que el *ghetto*. No puede, por tanto, sorprender que otros dominios como la teoría de polinomios se enfrenten a su peculiar versión del problema.

Puede argüirse, sin embargo, que es en la rama, relativamente reciente, de la teoría de grafos donde la factorización reaparece en su forma más penetrante. El asunto excede con mucho el horizonte de este preámbulo, y será tratado en la segunda entrega de nuestro trabajo. Nos limitamos aquí a incorporar, a modo de adelanto o aperitivo, un anexo final con una colección de citas harrisianas al respecto, subconjunto de las que constituirán el punto de partida del análisis ofrecido en la prometida continuación.

Anexo: selección de citas de Zellig Harris en relación a los grafos

[1] ***Graphs of the set of sentences***: "The existence of a unique decomposition for graded sentences makes it possible to order the whole set of graded sentences in respect to

[49] Cf. Gottlob Frege, *Grundgesetze der Arithmetik,* Jena, Hermann Pohle 1893. Pero Frege entendía 'sucesor' como una relación y no, como Peano, en términos de función. Consúltese, a este respecto, Michael Dummett, *op.cit.*, p. 12-13.
[50] Cf. Zellig Harris, *op. cit*., p. 155.

their decomposition, and to investigate various relations among sentences and certain properties of the whole set of sentences." [51]

[2] ***Graph of partial sentences***: "There are various types of graph which represent the relations among sentences in such a way that properties of transformations or of subsets of sentences can be derived from properties of the graph." [52]

[3] "Consider the decomposition semi-lattice of an arbitrary proposition S_1. Here the vertices are operators (including the null points which select the kernel sentences, and the universal point which adds the sentence intonation); the edges connecting the vertices represent a minimal set of independent partial sentences of S_1 sufficient to characterize S_1. Because of the partial ordering of the transformations, some of the partial sentences of S_1 do not appear in the semi-lattice. We construct a graph representing all the partial sentences of S_1, i.e., all the sentences which can be obtained in the course of any order of decomposition of S_1, as follows: each operator vertex of the semi-lattice is replaced by an element consisting of a directed edge (representing the operator) from the end point of the preceding element, and a terminal vertex (which represents the resultant partial sentence); except that the null point is replaced by a vertex alone, and the universal point is replaced by nothing; in addition, each set of n lattice points which are unordered among themselves is replaced by $2^n\!-\!2$ vertices representing all the sentences that can be formed by combinations of the n operators from 1 up to n – 1 at a time (we draw connecting edges first for each pair, the for each triple, and so on, up to n-tuple of the n points; each set of connecting edges ends in a vertex representing the partial sentence)." [53]

[4] "In this directed graph of S_1, whose edges are transformations, all the vertices of the graph are all the partial sentences of S_1. The graph for each partial sentence S_q of S_1 gives all the partial sentences of S_q, and is a subgraph of the S_1 graph. A particular partial sentence S_q of S_1 may also be a partial sentence of some other sentence S_2. In that case the graph of S_q is a subgraph of the S_2 graph as well." [54]

[51] Cf. Zellig Harris, *op*. *cit*. p. 128.
[52] Cf. Zellig Harris, *op*. *cit*. p. 129.
[53] Cf. Zellig Harris, *op*. *cit*. p. 129.
[54] Cf. Zellig Harris, *op*. *cit*. p. 129.

[5] ***Longest sentence and finite information***: "We thus have a directed graph of all the sentences of the language, and for informational interpretation a finite graph. Any sequence of edges connecting two sentences is a transformational path which takes us from one sentence to the other, where a transformation is taken positively when going in the direction of the edge, and inversely when going against the direction of the edge." [55]

[55] Cf. Zellig Harris, *op*. *cit*. p. 130.