Quelques enjeux philosophiques des théorèmes de représentation. (I) Le théorème de représentation de Stone[1]

Albino Attilio Lanciani. Université Libre de Bruxelles / École Normale Supérieure de Lyon. aal@metispresses.ch

Le but de cette communication vise à ouvrir une possibilité de travail commun, du moins à certains égards, entre philosophes et mathématiciens. De prime abord, il semble plus facile d'articuler cette recherche d'un point de contact sur le plan de la logique. Tel sera aussi mon cas. Par ailleurs, je ne vais pas discuter des différents systèmes logiques, ni proposer des nouvelles interprétations de choses qui, je m'en suis souvent rendu compte, ennuient profondément les mathématiciens. Mon problème porte sur les données préalables sur lesquelles il faut se mettre d'accord pour rendre possible cet échange culturel potentiellement enrichissant. Un problème qu'on pourrait qualifier de « préparatoire » et qui devrait rendre cette communication plus aisée, même si ces questions sont encore, en grande partie, à travailler.

Il s'agit, par une réflexion sur la recherche mathématique, de rendre plus productif un concept que les philosophes citent souvent : *le concept d'identité*. Le problème est qu'ils le citent tout d'abord par l'intermédiaire *des différentes figures qui s'y approchent*, et ensuite, *d'une manière la plupart du temps non suffisamment clarifiée*. Par exemple en utilisant des termes comme *égalité*, *coïncidence*, etc. Ma première difficulté porte sur le fait que les philosophes utilisent souvent la formule $A = A$ et, certes, je peux bien sûr être d'accord avec cette formule, mais, et j'avoue par là mon ignorance, je n'ai jamais compris ce qu'on pouvait en tirer au-delà des limites de la banalité la plus plate.

Je pense que l'identité – la formule citée ci-dessus – est inutile si elle n'est pas considérée comme l'un des deux bouts d'une sorte de corde métaphorique censée représenter ce qu'une théorie de la connaissance sérieuse devrait tenter de prendre en compte, c'est-à-dire l'achèvement d'un parcours de ce qui, au début, paraissait tout au plus possible ou même souhaitable. C'est par ce déplacement de sens que l'identité me semble devenir intéressante : l'accomplissement d'un chemin de ce qui, au moment où l'effort de connaissance commence, tentait d'établir une *similitude*, une *ressemblance*, entre ce qu'on savait déjà et ce qu'on

[1] Ce texte est la réélaboration d'une intervention faite au séminaire de l'ENS-rue d'Ulm « Pensée des sciences » dirigé par Charles Alunni le 19 mars 2014. L'intérêt principal de ce séminaire consiste dans la création d'un « voisinage » entre philosophes et mathématiciens qui est, dans ce lieu, particulièrement vivace et porteur d'une possibilité de communication réelle. Je veux donc remercier Charles Alunni pour cette activité que j'ai trouvé fort enrichissante. J'ai tenté également de sauvegarder, dans le texte, les caractères d'une exposition orale. J'espère y être parvenu. Le texte a également bénéficié de la relecture de Pablo Posada Varela et de Carlos Lobo. Qu'ils en soient, ici, également remerciés.

voudrait connaître. Pour reprendre la métaphore précédente, quel est alors l'autre bout de la corde censée représenter le parcours de la connaissance ?

Pour simplifier, je vais appeler *analogie* la relation entre ce dont on dispose et ce qu'on veut connaître. Il suffit d'une réflexion rapide pour voir que, en quelque sorte, tout progrès impliquant une compréhension nouvelle du monde ou, plus humblement, d'un de ses fragments dans lesquels nous découpons la connaissance trouve, dans son arrière-plan, un chemin où pointent une ou plusieurs *analogies*. Souvent, après une analyse sommaire, il semble que l'analogie construite, entrevue, créée au départ – il est difficile de trouver un bon verbe déjà pour décrire quel est le rapport entre l'analogie créatrice et la création elle-même – a été la chose la plus importante qui s'est manifestée tout au long du parcours de connaissance ou de création culturelle. C'est comme si le bon parcours de création intellectuelle n'était rien d'autre que l'adéquation heureuse de la *réalité* – *réalité* qu'elle soit concrète ou idéale – à l'analogie supposée au départ.

Le fait qu'une réflexion rapide soit suffisante pour nous présenter cette situation, est, d'ailleurs, plus l'indication d'un danger qu'un indice de résolution des problèmes ; du moins lorsqu'on est quelque peu habitué aux difficultés de ce qui semble « aller de soi » en philosophie. En effet, il suffit de tenter de décrire le déploiement de l'analogie elle-même pour voir l'apparition de difficultés à chaque moment. De surcroît, la tâche devient encore plus difficile dès qu'on s'interroge sur la tentative de grouper les possibilités d'analogies, de les articuler en *familles d'analogies légitimes*. Heureusement, je me contenterai ici de beaucoup moins : *je viens d'affirmer que l'analogie est l'autre bout*, *par rapport à l'identité*, *sur la corde du parcours de la connaissance* et, en ce sens, je vais tenter d'illustrer en quoi les mathématiques peuvent aider la philosophie[2].

De fait, si on considère le chemin qui mène de l'analogie à l'identité, on se rend vite compte qu'il s'agit d'un parcours accidenté[3]. Pour trancher, voilà mon point de départ et ma première thèse : *je pense que l'analogie est le véritable moteur de la connaissance*, *sinon l'unique du moins l'un des plus fondamentaux*, *mais surtout*, deuxième thèse, *que les mathématiques représentent l'un des cas les plus importants pour comprendre la dynamique du parcours qui porte à la construction de la connaissance*.

Ce n'est que pour montrer une figure de cette articulation de la connaissance que l'on va considérer quelques uns des sens philosophiques fondamentaux d'un important théorème de représentation. Il s'agit du *théorème de représentation* de M.H. Stone concernant les algèbres booléennes. Les mathématiciens connaissent très bien cette démonstration et elle fait partie des bases de tout étudiant formé dans ces disciplines. Pour le dire brièvement, ce qui est important pour commencer à créer un point de contact entre philosophes et mathématiciens

[2] Je ne sais pas si la réciproque peut aussi être valable.

[3] Du point de vue de cet exposé, je suppose comme suffisamment clarifié tout problème qui relie ce thème avec celui de la rhétorique, je suppose les différences entre l'utilisation purement *persuasive* de l'analogie et son utilisation dans un projet de construction de la connaissance.

consiste dans l'exploration de ce qu'il y a autour de la « simple » démonstration. A ce sujet, on se concentrera sur quelques uns des éléments dont M.H. Stone fait usage et qui sont les véritables piliers, conceptuels pour le moins, sinon strictement mathématiques aussi, de la démonstration. En ce sens, il suffit d'énumérer les titres des paragraphes dans lesquels le mathématicien américain structure son travail pour en avoir une première mise en lumière. Dans ce long article[4], on va étudier d'un peu plus de près, toujours en vue de saisir ce qui peut être utile pour un travail phénoménologique, certains paragraphes du chapitre 2, notamment ceux consacrés à l'étude des *idéaux* et quelques passages du chapitre 4 où M.H. Stone s'occupe de mettre en lumière le théorème de la représentation qui porte son nom.

Au début de son article, pour caractériser le sens de son résultat et pour donner une idée du chemin que notre auteur a l'intention de poursuivre, le mathématicien américain écrit:

> Dans ce travail, qui est le premier d'une suite en projet, nous serons concernés d'abord par le problème de déterminer la représentation d'une algèbre de Boole donnée par des algèbres de classes, d'agrégations ou de combinaisons. Il est naturel de *supposer* que ce problème a toujours une solution qui porte à la construction d'une algèbre de classes isomorphe à une algèbre booléenne donnée. *Ce résultat est un analogue précis du théorème affirmant que tout groupe abstrait est représenté par un groupe isomorphe de permutations* [nous soulignons].[5]

Quelques phrases et voilà, d'un seul coup, deux problèmes : d'abord la *supposition* qu'il y ait cette possibilité de construire une algèbre de classes qui a la propriété d'être isomorphe à une algèbre booléenne ; deuxièmement, que ce résultat est un « analogue précis » du résultat bien connu qu'il y a isomorphisme entre groupes abstraits et groupes de permutations. Est-ce que cela veut dire que notre mathématicien a été conduit à chercher le théorème qui portera son nom par une analogie qui, au début, semblait « naturelle » ? Il s'ensuit alors immédiatement une deuxième question : en quel sens pourra-t-on parler d'analogie pour le résultat définitif ?

En ce qui concerne notre dernière question, il me semble qu'on peut éliminer les difficultés : d'une certaine façon, les mathématiques se structurent de telle manière que, justement, il n'y a pas de place pour l'analogie dans les « résultats » que ces disciplines donnent à l'histoire. En quelque sorte, dans le résultat accompli, il n'y a plus d'analogie comme quête de construction de la connaissance. Le résultat dit si la supposition est confirmée ou non. En revanche, il y a là tout un champ de travail pour le philosophe, à savoir l'analyse du chemin qui mène de la quête de la connaissance vers l'établissement d'un savoir attesté et valable en soi. Le résultat trouvé est dans le champ de l'identité et a quitté le caractère vague, même si riche en promesses, de l'analogie. De toute manière, M.H. Stone, fait d'autres remarques utiles pour notre travail philosophique et voilà qu'après avoir signalé

[4] M.H. Stone, « The Theory of Representation of Boolean Algebras », in *Transactions of the American Mathematical Society*, Ed. American Mathematical Society, Providence, Vol. 40, N° 1, 1936 ; pp. 37 – 111.

[5] *Ibidem*, pp. 37 – 38.

que, dans la suite, on montrera la validité de cette supposition, il enchaîne, au sujet de l'« analogue précis » :

> Il s'agit d'un fait curieux que ces résultats soient considérablement plus abscons (*obscurs*) (*recondite*) que les théorèmes correspondants pour les groupes abstraits : les éléments des classes représentatives doivent être pris comme certaines classes d'éléments dans l'algèbre booléenne donnée (en particulier comme les idéaux premiers dans l'algèbre), tandis que les éléments des permutations représentants un groupe abstrait sont pris à l'intérieur du même groupe ; et l'existence des idéaux premiers, dans les termes desquels la représentation est construite, peut apparemment être établie en général seulement par un appel aux hypothèses de Zermelo.[6]

Il est d'ailleurs assez étonnant que M.H. Stone utilise le terme de « curieux » pour affirmer que les résultats de son théorème de représentation semblent plus dissimulés et beaucoup plus difficiles à atteindre que la représentation typique concernant les groupes abstraits. Pourquoi devrait-on penser que cette démonstration aurait dû se développer de manière plus *triviale* ? S'agit-il, de la part de M.H. Stone, de créer une attente chez le lecteur ? Enfin, s'agit-il d'un artifice rhétorique ?

On peut remarquer que, dans le théorème de Stone, l'analogie de départ est déjà établie comme moins stricte : il faudra introduire un nouvel « objet mathématique » pour rendre praticable ce chemin, justement les *idéaux*. Si le projet initial visait à concrétiser directement l'analogie en la transformant en une identité, dans la situation concrète, il faut prendre un détour de telle sorte que cette création ou constatation d'une identité soit poussée et renvoyée, en quelque sorte, dans un espace idéal plus « dilaté ». D'ailleurs, si la résolution et l'obtention du théorème de représentation avait été permise par un chemin identique à ce qui a lieu dans la théorie des groupes, on n'aurait pas ajouté grand chose à ce qui avait déjà été fait. On disposerait d'un doublon, certes intéressant, mais pas plus.

D'autre part, on retrouve le problème introduit par l'utilisation des *idéaux* qui, avant même d'être mieux caractérisés, car ils constituent la partie la plus intéressante de l'articulation suivante de l'analogie, ont besoin des « hypothèses de Zermelo ». Celles-ci concernent l'*axiome du choix* et sa formulation équivalente, très utilisée pour démontrer le théorème de représentation de Stone, qui porte le nom de *Lemme de* Zorn[7].

---

[6] *Ibidem*, p. 38.

[7] Il suffit de prendre un livre quelconque de théorie des ensembles et compulser la partie dédiée aux formulations équivalentes de l'axiome du choix. On y retrouvera le Lemme de Zorn déjà cité, le Principe de trichotomie, le Principe de Kuratowski, etc. Je ne vais pas rentrer dans cette question, la littérature à ce sujet étant immense. Mon propos est seulement de mettre en évidence la difficulté de se frayer un chemin entre les sens différents du mot « équivalence ». On peut se limiter au problème suivant : lorsqu'on parle d'*équivalence logique*, pourquoi, après, dans la pratique, les *axiomes équivalents* ne sont pas utilisés de manière si *équivalente* ?

C'est un fait – peut-être après l'intervention de Bourbaki, mais cela ne change pas la question – que l'axiome du choix reste pratiquement inutilisé, tandis que la part du lion est joué par l'*équivalent* Lemme de Zorn. C'est-à-dire que probablement il faudrait encore travailler à fond la question et voir si les richesses créatrices que ces formes équivalentes mettent en jeu ne cachent pas des différences épistémologiques profondes.

En réalité, si l'on revient à la démonstration stricte de notre théorème, l'élément le plus compliqué pour structurer l'analogie qu'on vient de tenter d'établir est que, à proprement parler, le problème se dédouble : ce n'est pas vrai, ou, du moins ce n'est pas complètement vrai qu'il y a un passage si abrupt entre la possibilité d'établir un isomorphisme entre groupes abstraits et permutations d'un côté, et entre algèbres de classes et algèbres booléennes de l'autre, et cela en vertu d'une propriété spécifique de ces dernières. Autrement dit, les algèbres booléennes peuvent être *atomiques* ou *non atomiques*. M.H. Stone définit les atomes, d'abord informellement, en soulignant qu'ils indiquent les éléments les plus petits différents de 0[8]. Cependant, pour mieux comprendre cette affirmation au-delà de la stricte définition formelle, il faut considérer ce que, d'habitude, les mathématiciens « ajoutent ». Par exemple, R. Sikorski écrit :

> La notion d'atome est l'analogue booléen de l'ensemble formé par un point. En fait, si A [le symbole utilisé par R. Sikorski pour indiquer une algèbre booléenne] est un corps d'ensembles (*field of sets*), alors tout ensemble formé par un point en A est un atome de A.[9]

Nous avons une nouvelle apparition du terme « analogue » et, en ce sens, le terme d'*individuum*, utilisé originairement par E. Schröder[10] pour indiquer les *atomes* est, peut-être, encore plus parlant car, quand on veut établir une relation d'isomorphisme, il faut fixer une quelque forme de correspondance « point-par-point ». De manière intuitive, on pourrait dire que l'isomorphisme se crée entre un *individu* d'un milieu et un *autre individu d'un autre milieu*.

En ce sens, les atomes indiquent la démarche qu'il faudrait prendre pour avoir une représentation certes ingénieuse, mais éloignée du chemin effectivement développé par M.H. Stone, un chemin beaucoup plus riche. En fait, pour une algèbre atomique, il y a une suite de théorèmes qui sont importants, mais qui ne permettent pas encore d'entrevoir la grande nouveauté apportée par le mathématicien américain. Pour l'instant, on peut démontrer que toute algèbre finie est atomique, et les résultats d'A. Tarski[11] prouvent que la condition nécessaire et suffisante pour qu'une algèbre booléenne A soit isomorphe à un corps de tous les sous-ensembles de quelques ensembles est que A soit complète et, justement, atomique. Mais, comme le souligne L. Henkin :

> Malheureusement, nous n'avons pas démontré le théorème de représentation pour *toutes* les algèbres de Boole, parce qu'il existe des algèbres de Boole où φ [il s'agit, pour L. Henkin, de la fonction censée établir l'isomorphisme] n'est pas biunivoque. En effet, on trouve des algèbres de Boole où $\varphi(x)$ est vide pour chaque élément x, c'est-à-dire des algèbres sans aucun atome.[12]

[8] M.H. Stone, « The Theory of Representation of Boolean Algebras », *art.cit.* ; p. 50.
[9] R. Sikorski, *Boolean Algebras*, SpringerVerlag, Berlin-Heidelberg-New-York, 1969 ; p. 27.
[10] E. Schröder, *Vorlesungen über die Algebra der Logik (Exakte Logik)*, vol. II, Teubner, Leipzig, 1891 ; en particulier § 47.
[11] En particulier, A. Tarski, « Zur Grundlegung der Bool'schen Algebra », I, in *Fundamenta Mathematicae*, vol. XXIV, Varsovie, 1935 ; pp. 177 – 198.
[12] L. Henkin, *La structure algébrique des théories mathématiques*, Gauthier-Villars, Paris, 1956 ; p. 16.

Un exemple classique d'algèbre non atomique est l'ensemble de nombres réels ($r \in R$), tels que $0 \leq r < 1$. Un intervalle donc fermé à gauche et ouvert à droite. Si on nomme B, l'ensemble de toutes les réunions finies d'intervalles fermés à gauche et ouverts à droite, on peut obtenir une *algèbre booléenne sans atomes*. C'est précisément à partir de cette constatation que, du point de vue épistémologique, la volonté de garder une « analogie stricte » entre théories des groupes et algèbres des classes apparaît encore plus forcée qu'elle le semblait auparavant. En effet, M.H. Stone nous dit que les deux milieux ont besoin de chemins différents, mais c'est aussi en ce sens que l'analogie entrevue au départ devient en même temps plus douteuse, mais également prometteuse en développements inattendus. En effet, quand il s'agira de trouver des représentants sur lesquels le théorème puisse « s'appuyer », on devra choisir une classe particulière d'ensembles, les *idéaux*. C'est alors, précisément pour ce faire, que, si nous suivons la première partie de la démonstration de M.H. Stone, le détour auquel on a précédemment fait référence devient consistant. En fait, M.H. Stone observe que :

> […] les algèbres booléennes peuvent être considérées comme des instances spéciales des systèmes connus en tant qu'anneaux abstraits, [et cela] nous permet d'appliquer les concepts et les résultats de la théorie algébrique moderne directement en relation aux buts de notre travail. Nous montrerons en détail que les algèbres booléennes sont identiques aux anneaux avec unité et où tout élément est idempotent.[13]

En effet, ce premier pas ouvre à la possibilité d'établir un pont de conversion entre le concept d'algèbre booléenne et celui d'anneau booléen. Même si ce passage peut sembler aller de soi, le fait qu'on se trouve vite confronté à la rigueur des passages formels oblige à l'articulation détaillée de chaque élément constituant le sens de ce premier détour. Comme résultat, cela ne donne pas tout simplement une démonstration formelle, mais – et on serait d'autant plus tenté de dire – aussi un nouveau thème de recherche épistémologique. Voyons donc comment cette première partie s'articule car, comme l'écrivent P. Halmos et S. Givant :

> Les théories des algèbres booléennes et des anneaux booléens sont reliées très strictement, en fait elles sont deux manières différentes de regarder *la même chose*. Plus précisément, chaque algèbre booléenne peut être transformée en un anneau booléen en définissant proprement les opérations de l'addition et de la multiplication, et inversement, tout anneau booléen peut être transformé en une algèbre booléenne en définissant proprement les opérations de réunion, d'intersection et de complémentation.[14]

Au-delà de la question technique concernant la véritable transformation d'une opération dans l'autre de telle sorte que les résultats soient conservés, ce qui est particulièrement intéressant de la citation précédente est l'indication qu'algèbres et anneaux booléens regardent « la même chose ». En quelque sorte, l'identification de cette « même chose » est la clé de voûte de toute l'analyse qu'on est en train de conduire d'autant plus que cette unification possible peut devenir l'un des caractères les plus intéressants, du point de vue épistémologique, des

[13] M.H. Stone, « The Theory of Representation of Boolean Algebras », *art.cit.* ; p. 38.
[14] S. Givant & P. Halmos, *Introduction to Boolean Algebras*, Springer, Berlin – New York ; p. 14.

mathématiques dans leur globalité. C'est-à-dire que ce mouvement d'inclusion peut, par la suite, être ultérieurement étendu en y incluant certains autres objets mathématiques qui sont, pour ainsi dire, légèrement décalés. Par exemple, dans notre cas spécifique, on peut faire rentrer dans cette dynamique d'identification partielle certains types spéciaux de *treillis*. Par ailleurs, et cela est très significatif car il nous indique qu'il s'agit d'un sens dynamique et non statique qu'il faut attribuer à cette détermination de relations, les auteurs du texte précédent ajoutent peu après, en nuançant l'affirmation que nous sommes est en train de commenter, que la relation entre algèbres et anneaux booléens revient à dire qu'ils sont « équivalents du point de vue définitionnel » (*definitionally equivalent*).

Évidemment, il ne s'agit pas de la découverte d'une propriété qui peut être utilisée de manière intuitive. Au contraire, il s'agit d'une relation précise établie par les moyens s'articulant dans la transformation des opérations précédentes.

Or, la chose la plus significative du point de vue philosophique est que cela nous montre comment peuvent apparaître, dans les différents champs mathématiques, de nouvelles liaisons entre des milieux qui semblaient n'avoir rien en commun. Par là, on établit des nouveaux points de contact entre des moments différents de la recherche mathématique et, par suite également, ces mêmes moments donnent un sens différent aux diverses phases de l'histoire des mathématiques qui avaient conduit à leur apparition. Répétons ce concept : ces nouvelles relations entre des moments différents s'instituent comme des objets nouveaux capables de donner, *à rebours*, une signification nouvelle aux moments qui en avaient permis le jaillissement. C'est en ce sens que dans notre analyse spécifique, le problème prend un sens philosophique précisément parce qu'il s'agit de donner un sens un peu plus ample à la locution « la même chose ». Qu'est-ce que cela veut dire ?

Il est évident qu'il ne s'agit pas de questionner les objets en eux-mêmes, mais, en quelque sorte, de comprendre la manière de les articuler. Le point crucial concerne donc la *dynamique* de la création d'objets mathématiques et non la *statique* des objets eux-mêmes. C'est pour cela que toute l'analyse qu'on vient d'articuler jusqu'à présent permet d'avoir une idée des richesses implicites, et ce de manière un peu plus approfondie philosophiquement parlant, contenues dans un terme dont il a souvent été question lorsqu'on discute de création dans le milieu des disciplines scientifiques, à savoir, celui de *structure mathématique* et ce qu'il faut entendre par là. Comme on le sait, il s'agit de l'un des grands pivots des mathématiques du 20^{e} siècle, du moins après l'effort d'éclaircissement conduit par Bourbaki. Nous en reprenons la définition classique :

> On peut maintenant faire comprendre ce qu'il faut entendre, d'une façon générale, par une *structure mathématique*. Le trait commun des diverses notions désignées sous ce nom générique, est qu'elles s'appliquent à des ensembles d'éléments dont la nature *n'est pas spécifiée* ; pour définir une structure, on se donne une ou plusieurs relations, où interviennent ces éléments [...] ; on postule ensuite que la ou les relations données satisfont à certaines conditions (qu'on énumère) et qui sont les *axiomes* de la structure envisagée. Faire la théorie axiomatique d'une structure donnée, c'est déduire les

> conséquences logiques des axiomes de la structure, *en s'interdisant toute autre hypothèse* sur les éléments considérés (en particulier, toute hypothèse sur leur « nature » propre).[15]

Je ne veux pas rentrer dans le débat concernant l'hypothèse qui voudrait que la notion de structure puisse (ou pas) « épuiser » toutes les mathématiques. Je ne le crois pas, mais cela n'est pas important en ce moment. Du point de vue épistémologique, ce qui est décisif dérive des suggestions que cette notion met à notre disposition pour la recherche qu'on est en train de conduire. Ce qui est alors en quelque sorte *déterminant* est que, suivant cet axe de compréhension et à certains égards, il est désormais inutile ou, du moins, tout à fait *partiel*, de s'interroger dans la tentative de spécifier la nature des objets mathématiques si on poursuit l'idée d'éclaircir le sens épistémologique profond de ces disciplines.

On remplace cette interrogation par une sorte de projet orienté par le pouvoir des axiomes spécifiques, et c'est pour cette raison que l'activité philosophique doit, pour ainsi dire, *ralentir cette dynamique*. L'analyse philosophique doit y voir un projet d'articulation et analyser cette dimension de « projet ». De surcroît, elle doit profiter du fait que cela laisse entrevoir l'établissement d'une *cartographie*[16] des relations car, au fond, les axiomes n'expriment, de manière quelque peu figée, qu'une gamme de relations possibles. Au fond, suivant la vision axiomatique, on fixe une structure et on la « laisse » évoluer par les moyens dont elle est pourvue ; la réflexion philosophique doit fixer l'attention sur la constatation que cette évolution conceptuelle concerne, bien sûr, aussi bien l'histoire des mathématiques que la manière d'établir des relations. C'est pour cette raison que la réflexion philosophique trouve dans la *cartographie* de ces relations le point de départ pour établir une logique nouvelle philosophiquement significative. A partir de ces considérations, on peut déterminer deux éléments analytiques fondamentaux, l'un plus général, l'autre plus spécifique en vue de mieux caractériser le théorème de représentation de Stone:

1. L'idée d'éclairer les relations possibles, où cette nouvelle conceptualisation se configure en amont par rapport aux objets censés les valider, s'entrecroise profondément avec le projet d'une authentique logique d'inspiration phénoménologique. Cela au sens où le premier élément théorique de cette logique devrait être d'indiquer quelles relations sont passibles de faire du sens et cela indépendamment des objets qui pourraient, ou non, être concernés. Cela en vue de caractériser tout élément censé constituer une logique de l'approche rationnelle du monde. Toute cette activité met de côté le problème de déterminer la nature des objets mathématiques (et *lato sensu* des objets en général) et permet de libérer des énergies en vue de comprendre, plus proprement et d'un point de vue strictement logique, aussi

[15] N. Bourbaki, « L'architecture des mathématiques », in [F. Le Lionnais], *Les grands courants de la pensée mathématique*, Hermann, Paris, 1998[2] ; pp. 40 – 41.
[16] Je reprends ce terme à G.-C. Rota qui, dans son article « *Fundierung* », le voit comme l'un des grands axes de recherche pour fonder une véritable logique phénoménologique.
Pour cela, G.-C. Rota, *Phénoménologie discrète. Ecrits sur les mathématiques, la science et le langage*, Mémoires des Annales de Phénoménologie, Beauvais, 2005.

bien le raisonnement mathématique que ce que ce type de raisonnement peut apporter à toute articulation rationnelle de la pensée[17].

2. De manière philosophiquement dérivée par rapport à la question fondatrice qu'on vient d'introduire, il est clair que tout ce qu'on a fixé jusqu'ici, surtout en ce qui concerne le jeu d'analogies que les réflexions conduites par M.H. Stone ont présenté, doit être repensé à l'intérieur de ce nouveau cadre conceptuel totalement transparent aux déterminations objectives. Pour le dire de la manière la plus claire, *il faut s'efforcer d'éliminer de tout ce qui précède la notion d'objet au sens élémentaire* – ou ontologique – *et de regarder comment cela articule différemment ce qu'on vient de présenter*.

Le problème introduit en premier lieu sous-entend un projet tellement vaste qu'il ne peut pas être traité dans ce qui suit, tandis que le deuxième point, dans sa limitation, permet une analyse un peu plus approfondie. A ce propos, il faut revenir sur la nécessité d'abandonner la notion d'*objet élémentaire* et la lier au thème spécifique du théorème de Stone. Par là, il faut comprendre quel est le déplacement important qui a eu lieu : les termes de confrontation ne sont plus les éléments basiques normalement acceptés pour étudier une création mathématique – qu'ils soient, en général, des nombres ou des points –, mais justement les *relations créatrices*. *Et c'est à partir de ce changement de projet*, tout explicité ou non explicité qu'il soit, *que les analogies seront espérées, soupçonnées et recherchées*. Ce sera en vertu des relations que certains objets les validant seront créés et non *vice versa*.

Par le biais de ce nouveau critère de construction, on vide les étants mathématiques élémentaires de tout *coefficient ontologique primitif*. Le poids ontologique est déplacé dans la direction d'une plus grande liberté créatrice qui concerne aussi bien la possibilité de donner des figures différentes d'une même structure que la possibilité de rendre ces mêmes structures comparables dans un sens beaucoup plus large que ce qu'il était permis par une simple confrontation d'*objets élémentaires*. En ce sens, il est clair que s'interroger sur l'analogie que décrivait M.H. Stone entre groupes abstraits et algèbres de Boole devient, avant tout, « pertinent » également d'un point de vue philosophique et non exclusivement d'un point de vue mathématique. Car il n'y a aucune autre manière possible, pour que le terme d'analogie, dont traite M.H. Stone, fasse du sens : il s'agit d'un rapport entre structures et non entre objets. Tout au plus il s'agit d'un rapport entre objets validant des structures et il est clair que, pour parler le langage habituel de la philosophie, la primauté ontologique revient aux relations.

D'autre part, la notion elle-même d'analogie doit être repensée entièrement puisqu'elle ne peut plus indiquer une quelconque correspondance biunivoque que l'on aurait en point de mire entre un objet d'un milieu et un autre objet situé ailleurs. On n'en est plus là ; on est

[17] Il faut répéter que je n'entends pas non plus dire que cela épuise toute prise rationnelle du monde, mais il est évident que disposer d'une *cartographie* des relations de création des objets idéaux constituerait la phase préalable à la constitution d'une telle logique.

concerné par un problème qui est tout aussi bien d'une nature conceptuelle différente qu'englobant une possibilité de détermination beaucoup plus vaste. Autrement dit : ce qu'on a en vue est quelque chose qui, si l'on veut reprendre les termes de la rhétorique, ressemble beaucoup plus à une *allégorie* qu'à une simple *analogie*. Du moins au sens où *l'allégorie est censée exprimer un concept, une idée, par le biais d'une image*. En ce cas, en se limitant à une et une seule signification – puisque le problème serait de dénicher s'il y en a d'autres également admissibles –, ce dont il est question ici est *l'identité de la relation* qu'il y a entre groupes abstraits et permutations et celle qu'il y a entre algèbre de classes et algèbre booléenne. Cette identité *sui generis* exprime l'idée de la « relation thématique » dont il s'agit de donner une image – et tel est le point effectivement plus *allégorique* qu'*analogique* – en l'exprimant par les objets qui la représentent ou, on serait tenté de dire, qui l'*incarnent* sans, pour autant, épuiser les possibilités de représentation ultérieure.

Du point de vue strictement épistémologique c'est seulement à l'intérieur de ce nouveau cadre conceptuel que le chemin entrepris par M.H. Stone devient *cohérent*. Il s'agit de « répéter » et/ou de trouver des images d'une idée, la relation d'isomorphisme, et, en ce sens, il est parfaitement correct de soutenir que les deux chemins visés – d'un côté la relation entre groupes abstraits et permutations, de l'autre entre algèbres de classes et algèbres booléennes – sont strictement connectés et analogues, car c'est la question d'une représentation, d'une « figuration » de la *relation thématique* qui est en jeu. Mais cela ne peut s'appuyer que sur le concept d'*allégorie* tel qu'on vient de le présenter et, dans le cas spécifique qui nous occupe, en vertu du sens qu'on a attribué à la notion de *structure*. On peut raisonnablement soutenir que la cohérence épistémologique est due au fait qu'il y a emboîtement d'une ou de plusieurs *analogies* qui sont, dans une certaine mesure, ce qui constitue l'articulation fine de l'*allégorie*. Ce qu'il faut tout de même garder à l'esprit est qu'il s'agit de deux choses différentes.

Dans cette perspective on peut également admettre, mais l'admissibilité demeure, répétons-le, plus *allégorique* qu'*analogique*, aussi ce que M.H. Stone ajoutait au sujet des nouveaux objets mathématiques qu'il fallait introduire, à savoir le besoin qu'on a d'utiliser les *idéaux premiers* comme pivots qui permettront effectivement de soutenir le travail menant à la *représentation* véritable sans que cela diminue la relation qui existe entre les mondes différents qu'on tente de relier. Comme je l'ai déjà dit, la question de l'introduction nécessaire des *idéaux* montre, tout en restant dans une unité qui demeure telle en tant que tentative d'exprimer une identité de relation, combien on s'éloigne d'une correspondance triviale entre groupes abstraits et algèbres booléennes.

Il vaut donc la peine de suivre le chemin par lequel ces objets nouveaux sont introduits tout en sachant qu'ils vont remplacer, d'une manière quelque peu inattendue, la fonction jouée précédemment par les atomes. On peut résumer le procédé dans une première phase par les deux points suivants :

1. On introduit la notion d'*idéal* et on montre que cette notion rend explicites certaines relations avec d'autres structures. Cela représente, de toute évidence, un élargissement considérable des possibilités d'articuler le sujet de recherche à d'autres filières de l'activité mathématique. En ce sens, il est clair qu'on vient de dénicher un fond qui pourra constituer la base pour créer et sonder des nouveaux *remplissements allégoriques*. On établit, par exemple, les relations avec le concept de *treillis*. A la suite, on articule mieux le concept même d'*idéal* pour arriver à ce dont M.H. Stone a besoin, à savoir les concepts d'*idéal maximal* et d'*idéal premier*.
2. Il y a deux problèmes techniques à résoudre : d'un côté il faut qu'il y ait convergence, dans une algèbre booléenne, entre l'idée d'*idéal maximal* et celle d'*idéal premier* ; de l'autre, il faut garantir l'existence, *en* abondance[18], pourrait-on dire, d'*idéaux maximaux*. Le premier problème est résolu par un théorème affirmant qu'un *idéal booléen M est maximal si et seulement si il est premier*. On nomme habituellement ce résultat *la caractérisation de Stone*. Le deuxième problème ne peut être résolu que sur la base du *Lemme de Zorn* affirmant, dans une des différentes formulations par lesquelles on le présente habituellement, *qu'un ensemble partiellement ordonné inductif admet un élément maximal*.

Pour nous cela est presque suffisant, il nous faut seulement encore une considération : M.H. Stone démontre aussi que tout *idéal propre* – c'est-à-dire un *idéal* qui ne soit ni 0, ni 1 – dans une algèbre booléenne est inclus dans un *idéal maximal*. Il s'agit du *théorème de l'idéal maximal* qui a, dans notre vision des choses, la plus grande importance car il délimite par un chemin spécial les « éléments » dont on a besoin pour établir le véritable théorème de représentation. Cette « individuation d'éléments » est « géniale » (ce qui est à entendre comme expression d'admiration de la part d'un non-mathématicien) et peut être bien saisie par une formulation particulièrement claire du *théorème de l'idéal maximal* que nous empruntons à S. Givant et P. Halmos :

> Pour tout idéal propre M dans une algèbre booléenne $\mathcal{B}$, et pour tout élément p en $\mathcal{B}$ qui n'appartient pas à M, il existe un idéal maximal qui contient M et qui ne contient pas p.[19]

Voilà le passage-clé qui retrouve, en quelque sorte, la réciproque des atomes, à savoir ce dont on a besoin pour établir un véritable théorème de représentation : *un idéal maximal identifie un ensemble et le point qu'on cherche pour établir la représentation ne peut être obtenu que par complémentation de ce même ensemble*. Il s'agit, à présent, d'établir d'abord la notion d'homomorphisme pour une algèbre booléenne suivie de celle d'isomorphisme et, par la suite, de prouver que toute algèbre booléenne est isomorphe à un corps d'ensembles, mais l'on peut abandonner à présent le détail de cette démonstration car elle a déjà fourni l'élément essentiel au sens épistémologique, à savoir la fonction jouée par les *idéaux maximaux*.

[18] Je reprends cette locution à S. Givant & P. Halmos, *Introduction to Boolean Algebras*, *op. cit.* ; p. 172.
[19] *Ibidem*, p. 175.

*

*　　*

Cela étant, il y a un autre enrichissement possible que, jusqu'à présent, nous avons volontairement passé sous silence, mais qui, en réalité, ne sort aucunement de l'interprétation quelque peu *allégorique* qu'on vient de donner. En fait, comme on le sait, même si ce ne fut pas le chemin suivi par M.H. Stone, son théorème de représentation peut être démontré en exploitant un des caractères intéressants des algèbres booléennes, c'est-à-dire leur nature duale. Pour faire bref, le théorème est très souvent démontré en utilisant les *ultrafiltres*, notion duale par rapport à celle d'i*déal maximal*.

Pour résumer les résultats, on peut bien affirmer que si l'on suit la démarche des *ultrafiltres*, un point est retrouvé par le biais des ensembles qui le contiennent – en termes topologiques : les voisinages qui le contiennent – ; si l'on suit la démarche des *idéaux*, ceux-ci identifient l'ensemble, hormis le point recherché et on établit donc ce point comme ensemble complémentaire.

En quelque sorte, par ce biais, on est conduit à comprendre qu'une *allégorie*, précisément puisqu'il s'agit d'exprimer une idée, ne se résorbe pas exclusivement dans l'expression elle-même. C'est-à-dire que les *ultrafiltres* permettent aussi d'exprimer, de manière également correcte, cette structure isomorphe que le théorème de représentation de Stone s'occupe de prouver. Il s'agit, encore une fois, d'une image de la « même chose ».

Clairement, ce qui précède est à intégrer dans la dimension d'un projet dont, tout au plus, on ne vient d'esquisser que quelques-unes des idées directrices. Ces idées peuvent être brièvement synthétisés en répondant aux questions suivantes :

1. Strictement relié au point de départ choisi : quel est le sens qu'ont pris les concepts d'égalité ou d'identité ?
2. Qu'est-ce que nous apprend, dans les termes d'une contribution à la compréhension des dynamiques internes aux mathématiques, la démarche qu'on vient de présenter ?
3. De quelle manière le résultat de M.H. Stone, mais surtout tout ce qui en découle dans les termes de la réflexion conduite sur l'analogie, peut-il être intégré dans la tentative de construire une logique philosophique qui ne tente plus de copier les résultats de la logique mathématique?

Pour répondre à la première question, il est clair qu'on vient d'obtenir un agrandissement considérable du champ d'action de l'idée d'identité dont on était parti. Et la première considération est que ce concept est devenu une sorte de terme dernier d'un processus. Il est intéressant de remarquer que l'utilité pratique de ce processus lui-même est déterminée par le fait de saisir, à chaque moment de la construction de la connaissance, que ce qu'on obtient n'est au fond autre chose qu'un élément de ce même parcours, un palier. Une propriété partagée par tous ces paliers est l'« être ouvert vers ». Au fond, toute forme utile dans le chemin de la connaissance doit se caractériser par le fait d'être « au milieu du gué » ou, pour le dire autrement, par le fait de se situer dans une structure d'ordre, certes *partielle*, mais jamais comme l'élément final de cette même structure d'ordre.

C'est sous cet angle d'observation que l'identité revêt une fonction particulière : elle devient une sorte d'image parmi d'autres et représente la forme extrême de ce même chemin. Si on considère les « morphismes » comme le sujet principal de recherche dans l'activité visant à connaître mathématiquement, à l'intérieur de la famille, des problèmes du type de celui qui a été résolu par M.H. Stone, il est alors clair que l'expression de l'isomorphisme accompli boucle et achève, en un certain sens, tout le parcours. Mais, comme toujours, une réponse n'est, philosophiquement, que l'ouverture de questions nouvelles. Pour cette raison, il faut être très attentifs au fait qu'il y a au moins deux manières presque opposées de considérer l'isomorphisme atteint:

1. on peut le regarder comme un résultat qui achève, tout au plus, un champ de recherche. Comme la conclusion d'un long chemin servant à montrer qu'on ne parlait effectivement que des « mêmes choses ». Cette manière de voir les choses est tout au plus l'évolution de l'attitude qui nous laissait complètement insatisfait lorsqu'on nous présentait la relation d'identité.
2. D'autre part, la construction de l'isomorphisme peut, à elle seule, nous inciter à poursuivre la recherche en deux sens bien différents:

   a) On peut étudier tout le processus créateur qui est monté jusqu'à ce point et qui a permis à la communauté des mathématiciens (et des philosophes aussi) la construction de nouveaux objets mathématiques et de nouvelles relations, entre autres la relation entre *anneaux* et *algèbres* et, partant, un sens nouveau des *idéaux* et des *ultrafiltres*.
   b) On peut regarder toute cette dynamique d'un point de vue plus profondément épistémologique : si l'on regarde la même chose de deux points de vue différents, on dispose, à certains égards, de deux choses différentes quant à leur pouvoir créatif. C'est ce pouvoir créatif qui pourra, ou non, être remis en jeu. Autrement dit, l'isomorphisme qu'on a retrouvé permet, d'un côté, de parler le même langage pour deux champs qui paraissaient fort différents, mais, de l'autre côté, il est toujours possible que ces mêmes champs établissent des liens et des possibilités d'évolutions différentes.

C'est surtout à ce qui vient d'être introduit dans l'articulation du deuxième point précédent que doit être consacrée l'attention des philosophes. C'est par ce biais qu'un « résultat final » peut être considéré comme une nouvelle source de suggestions, comme une connaissance d'ordre supérieur qui permet une nouvelle aventure de la connaissance. C'est dans cette direction que chaque résultat n'a de sens qu'en tant qu'*ouverture vers un futur*. Même le cas spécifique du théorème de Stone, la construction d'un isomorphisme entre deux « points de vue » différents, n'empêche pas qu'on puisse s'ouvrir vers de nouvelles *analogies créatrices*.

D'ailleurs, si la relation d'identité est considérée à la lettre, comme cela semble suggéré par une attitude qui se contente tout simplement du « résultat », on n'obtient que le « non changement ». Certes, même dans ce cas, il s'agit bien d'une relation dont on a besoin, mais son pouvoir expressif est limité car elle se configure précisément comme la « forme limite » de l'enchaînement producteur de connaissances. Cela est dû au fait que la connaissance demeure *essentiellement* une ouverture de sens, une urgence tournée vers le futur. Cette ambition vers le savoir n'est pas une composante secondaire de la connaissance, au contraire, *il n'y a pas de connaissance sinon dans cette perpétuelle ouverture*. C'est-à-dire qu'atteindre même une forme d'isomorphisme ne doit pas faire oublier qu'il s'agit d'une identité par rapport à un ou à plusieurs paramètres. Car il est vrai que, modulo 12, midi et minuit sont la même chose, mais il suffit de regarder au dehors pour se rendre compte qu'une identité par rapport à un paramètre ne fait qu'exalter des possibilités créatrices qui ne sont pas, pour autant, épuisées.

Dans un certain sens, tout le chemin qu'on vient d'accomplir peut être résumé par les mots très éclairants d'A. Weil :

> Rien n'est plus fécond, tous les mathématiciens le savent, que ces obscures analogies, ces troubles reflets d'une théorie à une autre, ces furtives caresses, ces brouilleries inexplicables ; rien ne donne aussi plus de plaisir au chercheur. Un jour vient où l'illusion se dissipe ; le pressentiment se change en certitude ; les théories jumelles révèlent leur source commune avant de disparaître […] ; on atteint à la connaissance et à l'indifférence en même temps.[20]

Deuxièmement, il y a un autre projet, plus profondément phénoménologique, car il vise au sens du mot *isomorphe* lui-même et peut utiliser cette notion pour créer l'enchaînement des sciences qu'E. Husserl avait en point de mire dans sa *Logique formelle et logique transcendantale*. Le chemin conceptuel qui nous introduit dans cette recherche est donné par une considération très profonde d'H. Weyl :

> Une science ne peut établir son domaine de recherche que jusqu'à une application isomorphe. Elle reste totalement indifférente à l'« essence » de ses objets. Ce qui distingue les points réels dans l'espace des triades de nombres ou d'autres interprétations de la géométrie, on [26] ne peut le *savoir* (*kennen*) que par l'intuition. Mais l'intuition n'est pas ce repos bienheureux que rien ne pourrait venir troubler. Elle s'expose au dilemme et à l'aventure de la connaissance (*Erkenntnis*). Ce serait une folie d'espérer que la connaissance révèle à l'intuition quelque secrète essence des choses cachées derrière ce qui est manifestement donné dans l'intuition. L'idée d'isomorphisme marque à l'évidence la limite insurpassable du savoir.[21]

Il est difficile de trouver quelque chose qui soit plus riche dans la dimension du projet tout en délimitant, à l'intérieur de son champ propre, les possibilités de tout discours scientifique. Il est clair aussi qu'il faut quelques précisions supplémentaires pour éviter toute

[20] A.Weil, « De la métaphysique aux mathématiques » in *Œuvres Scientifiques*, vol. II, Springer Verlag, New York – Heidelberg – Berlin, 1960 ; p. 408.
[21] H.Weyl, *Philosophie des mathématiques et des sciences de la nature*, trad. C. Lobo, [à paraître] MetisPresses, Genève, 2016 ; pp. 42 – 43.

mécompréhension grave. Je n'entends aucunement soutenir que cela épuise radicalement tout processus de connaissance ; d'ailleurs H. Weyl aussi renvoie à un fondement sous-jacent et permettant de soutenir la construction scientifique. Il faut toujours se souvenir que nous nous mouvons dans la tentative d'isoler une logique plus profondément au sens où il nous faut viser, par là, la « structure » qui soutient l'approche rationnelle du monde. C'est pour cela que je préfère me limiter à la stricte considération de ce que H. Weyl vient d'affirmer et qui peut être utile pour toute analyse : si les sciences peuvent, tout au plus, aspirer à une représentation isomorphe d'un champ d'analyse, cela veut dire que la structure scientifique qu'on superpose à la réalité en est, justement et encore tout au plus, une représentation idéale dont les caractères de cohérence doivent être internes – avec tout un fondement logique qu'il faut à tout prix sauvegarder – et non externes. Les caractères qui concernent l'extérieur sont ceux d'une forme d'adéquation qui, d'ailleurs, ne concerne pas l'« en soi même de la réalité », mais la prévision de certains événements qui sont, eux aussi, épurés de plusieurs composantes réelles. Car, comme on l'a déjà caractérisée à maintes reprises, la réalité est, elle aussi, instituée. En quelque sorte, le modèle scientifique est, lui aussi, une *allégorie* conduite à ses conséquences : encore une fois, il s'agit d'exprimer une idée *sans que le modèle scientifique censé se rapporter à la réalité ne se confonde avec elle* ni ne soit, non plus, *épuisé par elle*.

Si on se limite à la considération du « pouvoir allégorique » comme capacité de création idéale, il est clair qu'il est destiné à rester tel quel tout en s'épanouissant dans des figures différentes. C'est alors aussi dans cette direction que la phénoménologie peut tirer profit du travail que les mathématiciens accomplissent. En fait si les sciences peuvent, tout au plus, aspirer à une sorte d'isomorphisme entre leur monde et le monde d'une formalisation réalisée à l'aide d'une théorie, il est alors clair que les formes admissibles de cet isomorphisme et, surtout, la manière de l'articuler, sont un sujet d'étude pour une logique concernée par toute approche sensée du monde.

En quelque sorte, que les mathématiques disposent ou non d'un monde « concret », cela ne change pas grande chose à ce que celles-ci peuvent apporter à la recherche philosophique : en pourvoyant les critères ou, pour mieux le dire, les différentes figures selon lesquelles une théorie des relations peut se développer, elles apportent une sorte de réservoir de possibilités d'articulation rationnelle de ce même monde qui, par ailleurs, doit constituer le référent ultime de toute spéculation philosophique.

Les mathématiques nous offrent, entre autre chose, cette possibilité de retrouver une manière de donner sens au parcours suivi jusqu'à présent. Cela se fait en fixant les bornes des chemins possibles et en laissant libres les développements permis par une créativité qui demeure encore *analogique* et/ou *allégorique*.