Intuition et invention mathématique

Florian Forestier
Université Paris-IV, Sorbonne

L'objet de ce texte, qui prolonge et développe un certain nombre de pistes ouvertes dans notre article « Mathématiques et concrétudes phénoménologiques[1]», est moins la philosophie des mathématiques que l'examen philosophique de ce que les mathématiques peuvent nous permettre de comprendre sur les productions ou créations de l'esprit humain. La position qu'il entend assumer, appuyé par le texte et les paroles d'un certain nombre de mathématiciens, est un refus de la thèse formaliste et la nécessité d'un questionnement formulé en terme de sens et d'expérience.

Il s'agit en effet pour nous de prendre acte d'emblée de ce que les mathématiques ne sont pas un pur langage formel. Ce qui relève en elles de la formalisation et du calcul n'en constitue pas la dimension unique, ni même la dimension fondamentale, car « un sens, une signification, un certain imaginaire accompagn(ai)ent le travail du chercheur. A la limite, la logique n'(est) utile qu'après coup, pour nettoyer la mathématique de toute cette gangue qui est cependant l'humus même de la pensée mathématique[2] »

Cette position relève bien plutôt d'abord des perspectives et descriptions amorcées par les mathématiciens eux-mêmes lorsqu'ils s'intéressent, plutôt qu'aux fondements de leur discipline, ou, problème qui les touche plus, qu'à l'ordre d'articulation des structures que celle-ci déploie, à la façon dont ils travaillent. De quelle façon procèdent-ils pour s'accorder sur des problèmes, définir peu à peu des objets, des structures, des stratégies démonstratives, ou pour s'entendre sur des programmes ou des projets partagés, alors que les objets et concepts à développer sont encore pour une grande part à développer.

Cette enquête n'est pas d'abord philosophique, que ce soit dans l'optique d'une interrogation sur les fondements des mathématiques, ou, inversement, d'une interrogaiton sur leur capacité à atteindre, révéler ou développer des vérités métaphysiques voire divines. Elle n'est pas non plus psychologique, car il s'agit bien moins d'expliquer par des mécanismes psychologiques, neurologiques, etc., sinon les objets mathématiques eux-mêmes, du moins l'activité conceptuelle des mathématiciens, que, suivant au plus près cette activité en train de se faire, de tenter de mieux comprendre la façon dont nous pensons et ce que nous faisons lorsque nous pensons. Ce n'est pas un hasard, répétons-le, si un une grande partie des références mobilisées dans cette optique sont issues de la plume de

[1] F. FORESTIER, « Mathématiques et concrétudes phénoménologiques », *Annales de phénoménologie n°11/2012*.
[2] N. CHARRAUD et P. CARTIER, *Le réel en mathématiques*, Paris, Agalma, 2004, « Introduction », p. 11.

mathématiciens. Il peut s'agir des écrits de Poincaré, du travail plus systématique d'Hadamard interrogeant les mathématiciens autour de lui sur les images et le langage utilisées dans la formulation de leurs résultats et remarquant l'importance de l'image géométrique[3], ou, à notre époque, de travaux d'inspiration tout aussi bien philosophique de certains mathématiciens de profession (par exemple G. Longo, F. Patras) usant de concepts philosophiques pour éclairer l'examen de leur pratique et de sa fécondité.

Les travaux de G. Longo nous intéressent tout particulièrement par leur façon de remettre, avec Poincaré, mais aussi Merleau-Ponty, le corps du chercheur au cœur de l'interrogation. Ce faisant, cet auteur n'entend certes pas écraser le sens de la pratique mathématique sur d'autres pratiques plus directement gestuelles et rudimentaires, mais rappeler que l'activité mathématique est toujours celle d'un sujet fini, incarné, se situant face au monde et face aux objets de sa discipline avec une mémoire spécifique, et les construisant selon une temporalité spécifique. La temporalité vécue de l'expérience de la création mathématique est même pour G. Longo ce qui plaide le plus nettement contre une réduction logiciste des mathématique : la conception constructiviste du temps chez Herbrand, Turing, Church et Heyting, impliquerait ainsi, écrit-il, une mémoire digitale sans oubli, alors que l'homme justement oublie. Cette structure de fragmentation et de perte de sa pensée et de son expérience n'en est pas une limitation, mais, J.-Y. Girard y insiste aussi, sa dimension essentielle[4].

Le présent texte entend dans la perspective que nous venons de présenter s'intéresser à quelques questions plus précises : en premier lieu, à la question de la généralisation et du processus de généralisation au sein des mathématiques ; ensuite à celle de l'idée problématique d'un sol sensible de l'activité mathématique ; puis à celle de la créativité et de l'invention mathématique : enfin, à la question de l'objectivité, ou plutôt du réel mathématique, et de la façon dont celui-ci affecte l'intuition du mathématicien.

Généralisation et abstraction

Le triomphe de la raison

Comme nous le rappelons dans « Mathématiques et concrétudes phénoménologiques[5] », les mathématiques tendent, depuis le début du XIX[e], à dégager des

---

[3] J. HADAMARD, *Essai sur la psychologie de l'invention dans le domaine mathématique* (1959) ; H. POINCARE, *L'invention mathématique*, 1908, édition Jean Gabay

[4] Cité par M.-F. ROY, « Le réel du calcul», p. 200, in N. CHARRAUD et P. CARTIER, *Le réel en mathématiques*, *op.cit.*

[5] F. FORESTIER, « Mathématiques et concrétudes phénoménologique », *Annales de phénoménologie n°11/2012*.

structures formelles explicitant les relations entre des objets qu'elles décrivent comme des cas de lois plus générales.

Donnons d'abord un exemple de ce processus en proposant un bref historique de la résolution des équations de degré supérieur ou égal à trois[6]. Comme le rappelle J. Vuillemin, les équations de degré 3 (de la forme $ax^3 + bx^2 + cx + d$) se résolvent classiquement en plusieurs étapes. Il s'agit tout d'abord de faire disparaître le terme en x^2 par une première substitution dont le principe est connu depuis les algébristes italiens du XIVe (pour obtenir une équation de la forme $a_1x^3 + b_2x + c_1$). Dans un second temps, il s'agit, par une seconde substitution, d'obtenir à partir de l'équation proposée une seconde équation auxiliaire. Celle-ci est de degré 6, mais se laisse toujours réduire à une équation de degré 2, car elle est de la forme $a_2x^6 + b_2x^3 + c_2$. On établit de cette façon une relation entre les solutions des deux équations à partir de la relation des termes substitués. Par un autre procédé, on substitue aux équations de degré 4 une équation de degré 12 que l'on peut réduire à une équation de degré 3. Dans les deux cas, c'est précisément le fait de parvenir à une équation de degré supérieur, mais en vérité réductible à un degré inférieur à la proposée, qui en permet la résolution. La question est alors de savoir pourquoi on ne peut trouver de semblable formule pour les équations de degré supérieur ou égal à 5, pourquoi l'équation de degré supérieur obtenue à partir d'elles s'avère irréductible.

Comme le montre J. Vuillemin, Lagrange examine cette question en partant de l'équation auxiliaire. Il montre pourquoi la technique de résolution réussit pour les équations de degré 3 et 4, pourquoi en d'autres termes on peut effectivement obtenir une telle équation auxiliaire réductible à une équation de degré inférieure à l'équation proposée, et pourquoi l'équation auxiliaire, lorsque la proposée est de degré 5 ou plus, est de degré irréductiblement supérieur. Ce renversement de perspective est caractéristique d'une évolution de la recherche mathématique, qui s'intéresse dès lors aux structures mathématiques générales cachées sous les problèmes, et qui permettent d'en produire l'intelligibilité propre.

Ce mouvement se poursuit avec les travaux de Gauss, et trouve son accomplissement dans la révolution galoisienne. Celle-ci produit enfin la structure globale liant les racines d'une équation à ses coefficients. Elle montre les raisons arithmétiques profondes pour lesquelles la méthode de substitution, qui réussit pour les équations de degré inférieur ou égal à 4, échoue pour les équations de degré supérieur. Les concepts de groupe, de corps, d'anneaux, d'algèbres, idéaux, sont issus de cette révolution : ils permettent de caractériser directement les relations des éléments d'un ensemble et les opérations auxquelles on les soumet sans que celles-ci n'aient à être qualifiées. Les groupes ne sont pas seulement des

[6] J. VUILLEMIN, *Philosophie de l'algèbre, Tome premier : Recherches sur quelques concepts et méthodes de l'algèbre moderne*, Paris : Presses Universitaires de France, 1962.

objets généraux utilisés de façon opératoire lors de la résolution de problèmes ; ils deviennent des *objets à part entière qui sont étudiés pour eux-mêmes.*

Pour J. Vuillemin, en conclusion, le mouvement d'abstraction qui caractérise les mathématiques est un mouvement de l'intelligence se comprenant elle-même et éliminant peu à peu le hasard et l'arbitraire de ses modes d'applications : elle ne relève donc pas d'une extension progressive du champ de cas embrassés par une théorie, mais d'une exploration des raisons de structure qui expliquent le comportement des objets selon leurs différentes spécifications.

Selon J. Vuillemin, un parallèle semble possible entre les principes à l'oeuvre dans la recherche mathématique et ceux explicités par les philosophies des époques correspondantes. La philosophie cartésienne correspondrait par exemple à une conception encore opératoire des mathématiques, axée sur la découverte progressive de stratégies, dont le mathématicien Descartes serait également l'illustration ; le premier tournant de la généralisation (opérant, selon l'auteur, entre Gauss et Abel/ Gallois), à partir duquel il s'agit de déployer *a priori* le principe d'engendrement et de différenciation des cas, pourrait être mis en regard de la philosophie classique allemande ; le second tournant de la généralisation, conduisant, lui, à la différenciation des axiomatiques et de leurs modèles, correspondrait bien sûr au moment autrichien de la fin du XIXe siècle et à la naissance de la phénoménologie et de la philosophie analytique[7].

[7] Comme nous le rappelions dans « Mathématiques et concrétudes phénoménologiques », *Annales de phénoménologie n°11/2012*, la mise en place de la *théorie des multiplicités* de Riemann joue un rôle important dans ce mouvement de généralisation en modifiant radicalement le sens de la démarche mathématique[7]. Elle modifie en particulier celui de la distinction de l'arithmétique et de la géométrie et les façons de traiter ces deux domaines. Une multiplicité est un *objet mathématique doté de lois formelles qui peuvent particulariser d'autres objets moins généraux* : on distingue ainsi les multiplicités *discrètes* (ou la comparaison des grandeurs s'effectue par *dénombrement*) et les multiplicités *continues* (où cette comparaison s'effectue par la *mesure*). Les espaces *géométriques* ne sont plus qu'un cas particulier des multiplicités continues, l'espace *tri-dimensionel* qu'un cas particulier de multiplicités *n-dimensionnelles*, l'espace *euclidien* un cas particulier d'espaces à *courbure constante*. Ces catégories de multiplicités n'ont pas, en elles-mêmes, de sens géométrique ni de sens arithmétique ; elles décrivent *l'engendrement de structures capables de décrire les lois de ce que nous connaissons intuitivement comme arithmétique ou géométrie*. En d'autres termes, elles caractérisent les opérations, de déductions, de raisonnements que l'on peut accomplir sur un certain type de multiplicité, c'est-à-dire des *types de théories constructibles*. *L'axiomatisation*, prolonge et radicalise ce mouvement. En elle s'opère un *changement de statut des axiomes,* lesquels ne sont plus des impératifs *a priori*, mais des *objets* définissant des systèmes déductifs au sein desquels la démonstration se soumet aux seules règles de dérivation analytique. Ce changement pose d'ailleurs des questions cruciales à la démarche mathématique tout entière puisque c'est *la forme même de la démonstration et la démontrabilité qui est prise comme objet.* Une révision générale de l'ensemble de ce qui paraissait jusqu'alors comme des évidences accompagne ce tournant. Quel est en effet le statut des démonstrations s'appuyant sur des données intuitives ? La question peut en fait être retournée puisque longtemps, les démonstrations se sont restreintes à un champ qu'elles ne posaient pas comme tel et au sein duquel elles jouissaient bien d'une évidence valable ; *c'est seulement à partir du moment où la définition formelle des problèmes outrepassait leur champ actuellement productible, suscitait des questions portant sur la formulation même de la définition (et non plus sur les exemples) que le regard mathématique s'est retourné des objets définis aux lois de leur définition. Le programme de Hilbert*, enfin, est la plus ambitieuse tentative d'assurer

Une généralisation non abstractive

Ce serait aller vite en besogne, ainsi, que de considérer qu'il n'y va dans ce processus de généralisation que d'une simple abstraction par sursomption. La perspective structuraliste et rationaliste de J. Vuillemin, qui voit dans l'évolution des mathématiques un processus de mise en lumière de la raison refoulant progressivement l'arbitraire qui l'habite, peut elle aussi être, sinon mitigée, du moins complexifiée. Avec A. Lautman, que nous accompagnerons quelques temps, il faut souligner en effet que la généralisation procède d'un travail d'extraction d'invariants, à partir de formes décelables à un certain niveau, lequel consiste en particulier dans la désolidarisation idéale de formes qui semblent liées. Ainsi, écrit Lautman

> «Nous avons vu dans tous les cas, certaines notions de l'arithmétique et de l'algèbre élémentaire, qui paraissent simples et primitives, envelopper une pluralité de notions logiques ou mathématiques, délicates à préciser mais en tout cas nettement distinguables les unes des autres. C'est ainsi que l'égalité arithmétique est la seule relation d'équivalence telle que le dénombrement des individus d'un ensemble se confonde avec le dénombrement des classes d'individus équivalents au sens de cette relation; de même l'idée de multiplication contient à la fois la formation de produits arithmétiques et l'action d'opérateurs sur un domaine d'éléments distincts de ces opérateurs ; l'idée de l'unité peut être considérée soit du point de vue de l'élément unité d'un anneau de nombres, soit du point de vue de l'opérateur identique d'un domaine d'opérateurs ; la longueur d'un segment est liée à la grandeur qu'elle mesure mais elle n'est pas un nombre attaché par convention à cette grandeur ; enfin la valeur absolue de l'algèbre classique enveloppe à la fois l'idée d'ordonnance et la construction de la fermeture d'un corps de nombres. Le passage des notions dites « élémentaires » aux notions abstraites ne se présente donc pas comme une subsomption du particulier sous le général mais comme la division ou l'analyse d'un « mixte » qui tend à

de manière stable et rigoureuse les fondements des mathématiques. On peut, selon Frédéric Patras dans « L'horizon sémantique et catégorial de la méthode axiomatique », *Noesis*, 2003, déterminer quatre influences majeures à ce programme. 1) La première concerne *la légitimation de l'usage de géométries non-euclidiennes*. Avec Cayley, puis Klein, a lieu ainsi l'absorption des propriétés métriques dans les propriétés projectives des figures: la géométrie est « arithmétisée » et ses nouveaux objets sont engendrés formellement, sans que l'intuition n'y joue plus aucun rôle normatif. La généralisation projective de l'arithmétique permet de la sorte de construire aussi bien des modèles euclidiens que des modèles non-euclidiens. 2) La seconde influence vient de *l'axiomatisation du continu*, à travers les travaux de Dedekind, Weierstrass, et Cantor. 3) La troisième influence, plus subtile, est celle de la théorie *Gallois*. Hilbert remarque en effet que l'abandon de l'hypothèse de continuité permet de décrire, sur *les structures mises en place par la* théorie de *Gallois* (la clôture quadratique réelle du corps des rationnels) toute la géométrie euclidienne. Pour la première fois, en d'autres termes, *la relation entre un système d'axiomes et les objets qu'il décrit est ébranlée*. Une même axiomatique peut se « projeter » sur plusieurs systèmes d'objets différents, ce qui ouvre la voie à la théorie des modèles et à la distinction des analyses syntaxiques et sémantiques des théories mathématiques qui joue un rôle important dans la réflexion de Husserl. La notion de complétude joue un rôle important pour éclairer le sens de cette distinction. 4) La quatrième évoquée par Patras est *celle de tentatives d'axiomatisations antérieures* (Moritz Pasch ou l'école italienne avec Giuseppe Peano et Giuseppe Veronese). En dépit de son désir d'évacuer tout recours intuitif, Hilbert demeure toutefois soucieux de ne pas rompre le rapport intuitif originellement noué au sein des premières constructions mathématiques.

> dégager les notions simples auxquelles ce mixte participe. Ce n'est donc pas la logique aristotélicienne, celle des genres et des espèces qui intervient ici, mais la méthode platonicienne de division, celle qu'enseignent le Sophiste et le Philèbe pour laquelle l'unité de l'Être est une unité de composition et un point de départ vers la recherche des principes qui s'unissent dans les Idées[8] »,

Les généralisations mathématiques se conquièrent non par abstraction mais par décomposition. Chaque structure est interrogée en regard des invariances qu'on peut comprendre à partir d'elle et constituer comme objets nouveaux. Ceux-ci ne sont donc pas seulement des objets de rang plus élevé ou d'un niveau d'abstraction plus fin ; ce sont les formes abstraites elles-mêmes qui sont dégagées les unes des autres, de sorte que la généralisation est en vérité plurielle. Il y va, en mathématique, d'un horizon de généralisations impliquant la recherche de *structures d'invariances* bien plutôt que de la recherche d'une seule formalité dominante. Unité et pluralité sont en d'autres termes en tension : il s'agit bien d'apercevoir l'unité des mathématiques au sein de la pluralité de ses objets, mais cette unité procède d'une possibilité d'applications, d'inter-traductions et de transferts. Elle n'apparaît que par la création permanente d'une pluralité d'objets qui circulent entre les domaines.

Ainsi, la généralisation multiplie les perspectives plutôt qu'elle ne les réduit, et dévoile la pluralité bien plutôt qu'elle ne la subsume. Chez A. Lautman, la raison mathématique ne s'éclaire pas peu à peu elle-même comme chez J. Vuillemin. Elle éclaire bien plutôt peu à peu une idéalité qui l'habite originellement. Les mathématiques, pose le platonicien A. Lautman, sont *dominées* par des problématiques métaphysiques qui frayent en elles leur chemin vers la raison, laquelle est en quelque sorte d'emblée ouverte, extasiée, et donc appelée à accomplir un processus dialectique. Avec Brunschvig, J. Lautman insiste certes sur cela que l'objectivité des mathématiques est l'œuvre de l'intelligence. Mais cela a pour lui comme conséquence que toute réduction des mathématiques à des principes ou à une architecture, que le mathématicien décèle, lui, pour s'aider et s'avancer dans sa recherche bien plus que pour instituer des principes ultimes, ne respecte pas le *telos* de cette activité.

À ce titre, les structures ne constituent sans doute qu'un pôle de l'activité mathématicienne. La réflexion de J. Vuillemin sur le dégagement progressif de grandes structures qui explicitent et rendent intelligibles des résultats mathématiques préalables doit ainsi être mitigée, de même sans doute que celle de Lautman. Certes, les structures et leur dégagement jouent un rôle capital au sein de l'activité mathématicienne, mais ce serait cependant trop s'avancer que de faire de cette activité un simple éclaircissement d'une dialectique entre structures. L'activité du mathématicien, qui est un effort fait d'essais, de

[8] A. LAUTMAN, *Les mathématiques et le réel physique*, Paris, Editions Joseph Vrin, 2006, « L'axiomatique et la méthode de la division », p. 79.

tentatives avortées et reprises, d'intuitions, consiste certes dans la mise en place de telles structures : mais précisément, c'est la façon dont celles-ci s'élaborent et la façon dont leur définition engendre de nouveaux objets qui constituent le cœur de cette activité.

On notera ici que la conception que nous exposons est très cohérente avec le structuralisme dynamique qui s'est imposé dans les développements de la recherche mathématique qui ont suivi le théorème de Gödel. Celui-ci, loin de limiter les prétentions du domaine formel, *les étend au contraire considérablement* en décrivant les conditions de détermination d'un modèle axiomatique correspondant à un domaine d'objets. Cette distinction est clairement soulignée par S. Bachelard dans *La logique de Husserl*.

Encore une fois, c'est bien d'une redéfinition (d'une nouvelle façon de décanter) le *telos* de l'activité mathématique qu'il s'agit ici. Le mathématicien accomplit désormais l'idéal normatif par une dynamique de l'activité de recherche. L'axiomatisation n'est plus une occupation préalable mais *la matière même de son travail quotidien*[9]. *Ainsi, les mathématiques modernes substituent peu à peu l'idée au calcul.* Il s'agit de saisir l'unité d'un domaine d'objets derrière la multiplicité de ses aspects, et de se laisser guider par l'idéal d'unification de ces domaines. La recherche mathématique s'éloigne ce faisant des objets individuels pour considérer les champs d'objets.

En définitive, la généralisation ne relève pas de l'élimination progressive de l'arbitraire qui résisterait à la pensée et d'une reconstruction endogène de la mathématique pure, mais de l'ouverture de toujours plus de potentialités, de toujours plus de chemins, de points de vue au sein des mathématiques.

La dimension sensible de l'acticité mathématique

La pluralité des chemins abstractifs

Dans une toute autre perspective, il faut également, avec G. Longo (et un certain Husserl), concevoir ce processus bien en amont des logiques d'abstraction au sein du corpus mathématiques, au prisme du très long mouvement et du très lointain héritage phylogénétique dont procèdent les premiers types de regroupements et d'abstractions (non, certes, pour, à l'instar du Husserl de *L'origine de la géométrie*, en déterminer les lois). Il faut par exemple tenir compte de l'individuation originaire des petits nombres (2, 3, 4) pour certains animaux et les petits enfants qui manifestent des réactions spécifiques au deux, au trois, etc.

9 S. BACHELARD, « « L'axiomatique-fondation » s'est muée en une « axiomatique arborescente » ; ou, si l'on veut, l'axiomatisation est passée du stade statique au stade dynamique », *La logique de Husserl, étude sur « Logique formelle et logique transcendantale »,* p. 113, Paris, PUF, 1957.

Dès lors, la barrière infranchissable du formel et du perceptif est atténuée, ou, plus précisément, dupliquée. Il n'y a d'une part strictement aucun sens à vouloir comprendre le contenu des propositions mathématiques à partir de quelque hypothétique base sensible ou gestuelle. La différenciation des ordres doit être, après Frege et le Husserl des premières *Recherches Logiques*, répétée (il s'agit par ailleurs dans ce premier sens d'une distinction *grammaticale*). Étant admis qu'il est égarant de chercher à rétablir les possibilités d'une dérivation directe de l'un à l'autre, il faut d'un autre côté comprendre l'activité mathématique dans la complexité de la pratique, dans l'entrelacement des niveaux qui y interviennent. Certes, l'erreur de Husserl et de la phénoménologie est d'avoir tenté d'élaborer une science ou une systématique, de cette zone intermédiaire, qu'il n'y a pas de sens à vouloir baliser. Il s'agit bien plutôt en effet de *tenir compte* de cette zone, de considérer avec suffisamment de souplesse et de plasticité théorique pour éviter toute réification philosophique, scientiste ou idéaliste, et d'exercer, en invitant à la considérer, le potentiel heuristique d'une telle attention.

Les mathématiques, pour G. Longo, s'occupent d'extraire des propriétés communes puis de les affiner dans des notations en apparence sans signification, dans l'horizon d'une recherche d'invariance. Il s'agit bien alors aussi de s'intéresser aux *embryons* de l'invariance mathématique, et pour cela à la pluralité, d'abord physiologique, des processus de leur extraction : l'œil et ses différents récepteurs aux formes, couleurs, mouvements, par exemple. Certains précurseurs de formes abstraites et générales peuvent ainsi être trouvés très en amont de toute activité conceptuelle réelle, par exemple, explique G. Longo, la ligne droite, qui est anticipation du bond vers une proie pour un prédateur. Ils sont alors peu à peu précisés, poursuivis, raffinés par les dynamiques de l'évolution. Si la langue mathématique et la logique de cette langue instituent une coupure avec l'expérience, la façon dont elle est mise au service du développement d'objets peut, elle, être pensée comme la pratique d'un être incarné, vivant, fruit d'une évolution, inscrit dans une société et dans une historicité.

L'humanisation, au delà de la simple hominisation, instille en effet au sein de ces dynamiques extractives un paramètre mnésique et culturel qui les complexifie considérablement. Les débats psychanalytiques nous mettent depuis longtemps en garde contre toute conception stratifiée de la genèse, inscrivant la strate symbolique sur la base d'une strate affective, et faisant des pulsions les formes sublimées des instincts. Tout au contraire, il faut prendre acte de la complexité que l'émergence des sphères sociales, techniques, langagières ajoute en réagençant et brouillant l'ensemble de l'édifice physiologique et de ses rythmes.

Cette barrière symbolique se constitue elle-même au sein d'une configuration plus vaste : les civilisations humaines développent en effet ce qu'on peut appeler une économie de la mémoire, permise par les techniques (qui sont toujours, pour reprendre un terme de B. Stiegler, mnémotechniques[10]). L'émergence des sociétés et l'évolution des processus d'inscription permettent, en ouvrant la scène des rapports inter-temporels, de mixer ces généralisations et de les stabiliser par un double processus d'inscription et d'idéalisation. L'écriture et l'évolution des notations favorisent ainsi le mouvement de division et de purification.

Comme le rappelle G. Longo, dans premières notations mathématiques connues, le concept général de nombre n'existe pas encore : il n'est pas séparé d'une sémantique ancrée dans des contextes d'usages très spécifiques. La signification n'est alors jamais totalement disjointe des notations numériques : le mouvement conduisant à la visée de la généralité comme telle est inséparable du mouvement de décontextualisation des écritures, lesquels ouvrent un espace de jeu permettant l'institution progressive de l'idéalité comme horizon.

L'écriture syllabique en particulier permet de représenter n'importe quel son, donc, de transcrire n'importe quelle langue. Elle n'est plus inscrite dans une langue donnée dont elle serait inséparable et ouvre de fait plus nettement à la possibilité de viser un universel transcendant la forme à travers laquelle celui-ci est exprimé. Avec Jacques Derrida, nous pouvons dire à ce sujet que « (...) l'écriture n'est pas seulement un moyen auxiliaire au service de la science – et éventuellement son objet – mais d'abord (…) la condition de possibilité des objets idéaux et donc de l'objectivité scientifique. Avant d'être son objet, l'écriture est la condition de l'*épistémè*.[11] »

Pour G. Longo, l'interaction entre la mémoire des actes d'expérience (la mémoire procédurale engrammée physiologiquement) et la mémoire déclarative enracinée dans l'écriture et le langage pourrait même constituer un paradigme de la théorisation mathématique[12]. Celle-ci procéderait de la transcription, de l'élaboration et bien sûr du prolongement, à travers des langages formels, d'un savoir en grande partie « sub-personnel », savoir du corps hérité de l'évolution. Dit autrement encore, ce qui serait le plus propre aux mathématiques serait l'activité d'un regard spécifique, faisant advenir à la conscience des invariants préparés par notre capacité d'agir. Selon G. Longo, en mathématiques « (…) avec des signes linguistiques, nous généralisons des propriétés de notre relation avec l'espace extérieur à un degré qui semble n'avoir plus aucun rapport avec notre compréhension originelle.[13] »

[10] B. STIEGLER, *La technique et le temps, Tome 1*, Paris, Galilée, 1995.
[11] J. DERRIDA, *De la grammatologie*, Paris, Editions de Minuit, 1967, p. 42.
[12] G. LONGO, « Mémoire et objectivité en mathématiques », in N. CHARRAUD et P. CARTIER, *Le réel en mathématiques*, *op.cit.*, p. 46.
[13] G. LONGO, *ibid.*, p. 43.

Comprendre autrement l'intuition mathématique

De la sorte aussi, la familiarité des abstractions les plus élaborées et des formes les plus primitives s'explique. Si, comme le note G. Longo, les dessins font revenir des abstractions algébriques à notre espace familier, mais établissent aussi des connexions avec d'autres domaines, c'est bien que les mathématiques sont une élaboration de formes qui conservent bel et bien un air de famille avec celles qui les inspire. Cette inspiration n'est et ne peut en rien être une explication, mais elle peut bel et bien être guide, indication, motivation, incitation pour le *flair* du mathématicien. En ce sens, les structures dégagées ne doivent pas être considérées comme abstraites. Elles sont concrètes, dans la mesure où elles veulent dire quelque chose pour les mathématiciens. Ceux-ci « voient » ou « comprennent » mieux certains phénomènes ou certaines questions à travers elles, font ou font plus facilement certaines opérations avec elles. Si difficiles et inhospitalières semblent-elles d'abord, elles sont aussi faites pour être habitées par d'autres regards théoriques : l'esquisse d'un programme, qui s'amorce par la formation d'objets très sophistiqués, ne sera féconde que si elle est suivie par la communauté, qui utilise ces objets pour de nouvelles démonstrations.

Indépendamment même de la fécondité potentielle du programme, sa fécondité réelle dépend aussi de ces contingences – quels mathématiciens, convaincus par l'investissement autant que par les arguments de tel autre, s'engagent à leur tour dans tel chemin de recherche… La fécondité de Grothendieck est par exemple aussi liée à la capacité du mathématicien à constituer autour de lui une école de haut niveau prolongeant ses intuitions, usant de la langue développée par lui, la réinvestissant… Rétroactivement, les protestations du même Grothendieck envers une institution qui aurait trahi ses intuitions (et refusé de le suivre dans le développement des objets ultimes que devaient être les *motifs*) et la réorientation ultérieure de la géométrie algébrique sont aussi liées aux ruptures personnelles du mathématicien avec nombre de ses collègues ou élèves. Entre-temps, l'avancée des mathématiques vers de nouveaux « fronts » aura sans doute modifié le sens que pourraient prendre ces motifs s'ils étaient développés avec les outils, perspectives et problématiques contemporaines, dans le cas par exemple où les notes de travail de Grothendieck conservées à Montpellier seraient – contre la volonté du mathématicien – rendues publiques et exploitées[14].

Il faut certes ici faire avec Wittgenstein[15] une distinction nette entre le problème qui est à résoudre et le problème résolu. Contre Wittgenstein, il faut cependant préciser que la rupture ne peut être totale, dans la mesure où l'objet est toujours aussi lié aux chemins de sa conception, quels que soient les usages qu'on peut en faire ultérieurement. La question de

[14] P. CARTIER, « Un pays dont on ne connaitrait que le nom », in N. CHARRAUD et P. CARTIER, *Le réel en mathématiques*, *op.cit.*
[15] L. WITTGENSTEIN, *Remarques sur les fondements des mathématiques*, Paris, Gallimard, 1983.

l'identité ou de la différence des objets avant et après la démonstration ou avant et après leur traduction est elle-même d'abord une question mathématique. Elle prend sens en fonction de certains horizons de questionnement ou de certains projets de démonstration. La distinction qu'impose Wittgenstein, qui a un sens en terme de philosophie des mathématiques, est sans doute fautive du point de vue des mathématiques elles-mêmes, et tout aussi bien ajouterions-nous, du point de vue de ce que les mathématiques peuvent apporter de plus enrichissant à la philosophie.

Ici sans doute, la conceptualité philosophique tend à introduire plus d'obscurité qu'elle n'en enlève, en imposant une dichotomie ou une triplicité (entendement, imagination, sensible) qu'il est difficile d'appliquer comme telle aux mathématiques. Permettons-nous un détour à travers la vision proposée par J. Vuillemin de l'intuition, qui est particulièrement représentative de ce réductionnisme. Pour J. Vuillemin, très kantien, l'intuition n'est que modélisation imaginative, et « (…) la figure empirique ne sert qu'à illustrer un concept qui nous donne a priori la règle selon laquelle cette figure doit être engendrée et regardée.[16] »

Il doit y avoir identité de structure entre la correspondance fonctionnelle qu'exprime le concept et celle qu'exhibe l'intuition. Toute la subtilité, écrit J. Vuillemin, est qu'il n'est pas possible de distinguer par l'entendement le concept et son image, tel étant le sens véritable du symbolisme impliqué dans l'imagination mathématique, simple règle de correspondance linguistique entre deux structures. La structure est alors la vérité de l'image : c'est la faculté de formaliser qui rend possible un rapport entre le concept et l'intuition, qui n'est qu'un guide et n'est en elle-même pas essentielle aux objets mathématiques. Ainsi,

> «C'est aussi le caractère symbolique de l'intuition mathématique qui explique sa plasticité. Si abstraite que soit une idée, on peut lui trouver une illustration dans le langage. Mais c'est à la condition d'utiliser l'image elle-même comme un langage, dont la perception requiert plus encore que la faculté de la vue, la compréhension des conventions qui la définissent et des abstractions qu'elle requiert.[17]»

Cette vision de J. Vuillemin fait cependant elle aussi abstraction de la réalité de la pratique mathématicienne. Elle considère les mathématiques de l'extérieur, du point de vue de leur achèvement, de leur stabilisation formelle, et écarte la dimension affective et inéliminablement instinctive de la mise en œuvre de cette intuition. Celle-ci ne relève pas d'un simple usage intuitif, mais d'une inscription, d'une familiarité, de l'aptitude à déceler des airs de familles, à transposer des idées en stratégies démonstratives, etc.

[16] J. VUILLEMIN, *Philosophie de l'algèbre*, *op.cit.*, p. 3
[17] J. VUILLEMIN, *Philosophie de l'algèbre*, *op.cit.*, p 312.

Comme le rappelle le commentaire proposé par Frédéric Patras de *Triangle de pensées*[18], le livre entretien croisé d'Alain Connes, d'André Lichnernowitz et de Marcel-Paul Schützenberger, Lichnerowicz distingue sur ce point de façon très pertinente le *discours de communication* et le *discours de création* des mathématiciens. Le discours de communication, par essence, est formel, et doit être préservé de tout engagement ontologique comme de toute ambiguïté intuitive. Le discours de création, de son côté, est prescriptif et « phénoménologique » : il s'agit à travers lui de *saisir* quelque chose. La structure d'une théorie mathématique est inséparable d'une forme de possession intuitive appartenant à ses conditions d'emploi, mais les débordant toujours aussi. Les structures définissent un *environnement* particulier, un véritable monde environnant. Est rappelée à cette occasion la célèbre description proposée par le groupe Bourbaki :

> «On ne saurait trop insister sur le rôle fondamental que joue dans ses recherches, une intuition particulière (2) qui n'est pas l'intuition sensible vulgaire, mais plutôt une sorte de divination directe (antérieure à tout raisonnement) du comportement normal qu'il semble en droit d'attendre, de la part d'êtres mathématiques qu'une longue fréquentation lui a rendu presque aussi familiers que les êtres du monde réel. Or, chaque structure apporte avec elle son langage propre, tout chargé de résonances intuitives particulières, issues des théories d'où l'a dégagée l'analyse axiomatique que nous avons décrite plus haut ; et pour le chercheur qui brusquement découvre cette structure dans les phénomènes qu'il étudie, c'est comme une modulation subite orientant d'un seul coup dans une direction inattendue le courant intuitif de sa pensée, et éclairant d'un jour nouveau le paysage mathématique où il se meut.[19]»

La description est tout à fait remarquable. Le monde mathématique est lié à certaines *anticipations*, à des horizons d'attente, à un certain style général induisant un certain comportement de la part des objets qui lui appartiennent, à certaines associations. Ce cours peut cependant être infléchi en reconfigurant le rapport avant-plan, arrière-plan, en variant les lieux sur lesquels se porte l'intérêt théorique et ceux qui n'en forment que l'horizon, etc. Une fois encore, la pensée mathématique procède par découverte de similitudes en cherchant le langage en lequel les formuler, et « (...) progresse, entre autres, en analysant la structure interne de son rapport aux objets (...) ».[20]

L'origine de la géométrie

Précisons ici que l'association, qui peut sembler à première vue surprenante, de la perspective platonicienne de Lautman (pour qui les mathématiques sont dominées par des questions de type méthaphysique portant sur l'espace, le continu, etc. dont elles réalisent la

18 A. CONNES, A. LICHNERNOVITZ, M.-P. SCHUTZENBERGER, *Triangle de pensées*, Paris, Odile Jacob, 2000.
19 BOURBAKI, « L'architecture des mathématiques », in F. LE LIONNAIS, *Les grands courants de la pensée mathématique*, Paris, 1957, p. 42.
20 F. PATRAS, « Pourquoi les nombres sont-ils "naturels" ? » in L. BOI, P. KERZSBERG, F. PATRAS (Eds.), *Rediscovering Phenomenology*, Springer, 2007, p. 364.

descente) et de la perspective plus opératoire de G. Longo, est en fait très légitime si on prend pour axe la question de l'invention. G. Longo lui-même, s'il insiste sur les processus et motivations sous-jacents à la généralisation et au dégagement d'invariants, ne nie en rien que ceux-ci s'opèrent dans l'horizon de ces grands problèmes et questions rémanents. Avec Husserl (ou H. Weyl) bien sûr, il rappelle simplement l'inscription sensible de ces questions, à la manière pourrait-on dire d'horizons transcendantaux : ainsi, l'horizon du continu, ouvert par la forme de notre expérience du temps[21].

On notera en effet ici que cette dimension n'est pas étrangère au traitement que Husserl propose de la géométrie et qui est bien exposé par D. Pradelle dans *L'archéologie du monde*[22]. La question centrale de Husserl dans ses recherches sur l'*Origine de la géométrie* est, on l'a déjà évoqué, l'idéalisation[23] effectuée par les sciences formelles sur la base des essences phénoménologiques décrivant les modes de donation des objets spatiaux, autrement dit l'engendrement des objets formels à partir du sol synthétique des substrats mondains. Il s'agit pour Husserl de dévoiler la stratification qui, des actes perceptifs, conduit, en passant par des degrés d'idéalisation successifs, à la *position du formel en général*, et quelles ont été les ruptures majeures de cet itinéraire. Mais il s'agit, du même coup, de déterminer le *telos* de l'activité mathématique tel qu'il s'est constitué et poursuivi, de décrire phénoménologiquement le projet de connaissance au sein duquel cette activité prend place.

Cette double perspective tend bien alors aussi à limiter la pertinence du formalisme qui n'épuise pas la totalité du champ de l'objectivité mathématique ni n'en accomplit seul son *telos*. La géométrie invite par exemple le phénoménologue à tourner son regard vers la logique transcendantale qui prépare le sol anté-prédicatif où prend pied la logique formelle, laquelle se libère certes de ce sol, mais non pour l'abandonner. Comme le note D. Pradelle, d'après Husserl, *le concept de multiplicité semble même échouer à caractériser l'objet propre de la géométrie parce qu'il ne porte plus en lui de sens proprement géométrique*.

Selon Husserl, le sens originaire de la géométrie n'est pas séparable de ses proto-idéalités, des figures qui ont été ses objets originaires. Toute l'activité mathématicienne présuppose au contraire un monde pré-donné d'objets extra-mathématiques, constitué originairement par les figures spatiales, propriétés intrinsèques des objets apparaissants. La *structure eidétique* de *l'apparaître sensible* constituerait pour l'activité idéalisante de la conscience un fondement dont la science ne peut se couper totalement, au risque de perdre le sens de son formalisme. Dans les *Idées 1*, Husserl décrit même les axiomes géométriques

[21] Cf. Aussi G. LONGO, « Le continu mathématique, de l'intuition à la logique », in J. PETITOT, F. VARELA, B. PACHOUD, J.-M. ROY, *Naturaliser la phénoménologie*, éditions du CNRS, 2002.
[22] H. HUSSERL *L'archéologie du monde*, Kluwer, 2000.
[23] E. HUSSERL, *Krisis*, § 9.

comme l'expression de *lois eidétiques fondamentales*, correspondant aux lois synthétiques essentielles de la région espace[24] (ce qui, nous l'avons écrit plus haut, nous semble cependant difficile à suivre).

Créativité et mise en oeuvre

Une dialectique transcendantale

Cette prise en compte du sol praxique à partir duquel s'édifie l'activité mathématique ouvre ainsi à une compréhension plus concrète du rapport de cette activité aux grands problèmes (espace, continu, infini) qui la traversent, et dont il paraît tout aussi risqué d'affirmer qu'ils procèdent d'une simple idéalisation que de poser qu'ils constitueraient pour les mathématiques une structure métaphysique dominante. Bien plutôt, il faut considérer de tels problèmes comme les *traces* inéliminables de la dimension toujours aussi sensible et corporelle de l'activité mathématicienne, et plus finement, de ce qui se joue dans la tension entre cette dimension irréductible (mais inacessible et impurifiable comme telle autrement que dans l'acte de théorisation) et l'idéalisation. Pour Marc Richir, par exemple, la pensée mathématique se retrouve orientée

> « (…) toujours déjà, par la médiation des catégories d'unité et de totalité, qu'elle constitue dans cette multiplicité des groupements, des systèmes, des relations, en lesquelles s'établit chaque fois la corrélation de l'unité d'un point de vue et de l'unité d'une multiplicité rassemblée en totalité.[25]»

Si une dialectique peut être esquissée, c'est bien alors au sens kantien, de telle sorte qu'il y a une séparation stricte entre une dimension « phénoménologique » ou « expérientielle », des horizons problématiques, et la façon dont ceux-ci sont repris au sein des théories et traduits à travers les

---

[24] Cf. D. PRADELLE, *L'archéologie du monde*, *op.cit.* Comme le montre par ailleurs D. Pradelle, Husserl fait également porter ses analyses sur des points précis de la théorie mathématique et de son lien avec la physique. Selon Husserl, la théorie des courbures de Gauss *ne permet pas la caractérisation interne d'espaces quelconques mais seulement celle de figures quelconques dans l'espace pré- donné* : la spatialité en elle-même leur échappe. La notion géométrique de congruence est irréductible à la notion algébrique de courbure, que l'impossibilité d'appliquer l'une sur l'autre la main gauche et la main droite n'est pas inscrite dans la structure formelle de l'espace euclidien, mais rencontrée, de manière irréductible, au sein même de cet espace. En d'autres termes, l'espace géométrique possède bien des propriétés spécifiquement géométriques qui relèvent d'un *a priori* phénoménologique. Selon D. Pradelle (commentant Riemann[24]), *la géométrie devient de la sorte une science non a priori* car la physique légifère pour la géométrie, permet de choisir entre les différents systèmes formels possibles. Les multiplicités continues, explique-t-il, ne portent pas en elles le principe de leur métrique : dans leur application à la description d'espaces physiques, cette métrique *extrinsèquement déterminée par les forces physiques qui les remplissent.* L'espace n'est ainsi pas indifférent à ce qui le remplit, ne peut pas être défini dans sa spatialité sans que soit aussi analysés les modes de liaisons de ce qui est posé comme le remplissant. La physique relativiste, remarque Pradelle, corrobore ce principe : il y est impossible de séparer l'espace du potentiel de gravitation, ce que D. Pradelle interprète comme l'existence d'une *connexion eidétique* entre espace et force de gravitation.

[25] M. RICHIR, *Recherches phénoménologiques IV et V*, Bruxelles, Ousia, 1983, p. 114.

formalismes. Précisons que nous parlons ici de dimension et non de base expérientielle, ce qui reviendrait à faire passer artificiellement une distinction au sein de l'acticité mathématique plutôt que de chercher à appréhender la complexité de celle-ci. Si les mathématiques sont inséparables de l'expérience et de sa corporéité, comprendre celle-ci comme un sol serait pourtant trompeur. De la même façon, si les mathématiques sont intersubjectives et humaines, si elles présupposent quelque chose de partagé (à la fois dans l'implicite de leur mise en oeuvre et dans leur projet), il ne s'agit en rien de quelque chose d'isolable comme tel, mais, là encore, d'une dimension de leur pratique.

Ajoutons que le terme de dialectique lui-même n'est que provisoire. Il doit être rapproché du concept husserlien et richirien de zigzag, l'idée de dialectique présupposant un rapport de tension trop nettement polarisé et orienté. Il s'agit bien ici de reconnaître une forme de tension permanente, au sein des mathématiques, entre pré-compréhensions sensibles et corporelles, objets mathématiques et interprétations philosophiques (métaphysiques) de ce qui s'y élabore, mais sans supposer de dynamique unique à ces tensions.

Ainsi, ce ne sont peut-être pas l'infini, le continu, l'espace qui resurgissent sans cesse (comme le postule Jean-Michel Salanskis[26]), mais les amorces sensibles qui sous-tendent la façon dont on les vise et qui impliquent une variabilité et une instabilité de l'idéalité[27]. Cette tension appelle une perpétuelle réouverture du sens que leurs idéalisations peuvent prendre et de la façon dont celles-ci peuvent être redéfinies. Les mathématiques touchent à quelque chose qu'on peut qualifier de phénoménologique, dans l'impossibilité d'épuiser *a priori* le potentiel de leurs structures – cela simplement parce que cette richesse n'est pas inscrite seulement dans leur conceptualité, mais dans la dimension active de celle-ci et dans la possibilité de poursuivre et de développer les virtualités à sa bordure.

[26] J.-M. SALANSKIS, *Sens et philosophie du sens*, Lille, Presses du Septentrion, 2003.

[27] A ce sujet, nous ne pouvons que renvoyer aux magistrales études consacrées par Marc Richir à la possiblité d'une phénoménologie transcendantale des mathématiques, ainsi qu'à l'article que nous leur avons consacré : « Mathématiques et concrétudes phénoménologiques », *Annales de phénoménologie n°11/2012*. Comme nous l'écrivions alors à propos des infinis cantoriens et de leur postérité mathématique, « (…) il ne s'agit pas ici d'une libre création, que la domestication de la prolifération de l'infini implique une véritable morphologie de l'auto-application de l'infini sur lui (…). La succession des ordinaux construits à partir de ώ explore ainsi le pouvoir du formalisme initial. La formulation de la « tour » permet par définition de poser un ordinal supérieur à tout ordinal s'écrivant sous la forme précédemment donnée. Le passage à la limite n'est donc ici qu'épuisement des possibilités d'une écriture « directe » par une méta-écriture. C'est en quelque sorte avec la récurrence du processus de dépassement « scriptural » que l'idée d'un ensemble ou d'une classe complète d'ordinaux constructibles par n'importe quel moyen à partir des opérations données prend un sens plein. L'exploration systématique des possibilités d'un formalisme donné à un certain niveau donne donc seule un sens maîtrisable aux positions d'objets inaccessibles par ce formalisme, en permettant de ne pas poser celles-ci dans le vide mais dans l'horizon d'un champ déjà structuré. Les excès (les nouveaux types d'ordinaux, de cardinaux, etc.) ne se construisent alors à chaque fois qu'en compliquant une structure théorique déjà donnée, par une forme d'autoréflexion du formalisme utilisé pour définir les précédents. Ces formalismes sont, à leur tour, transposables par modifications des hypothèses de départ, conduisant à ce que sous certaines conditions des objets théoriques très différents sous d'autres soient identiques. En cela, *la prolifération des infinis est malgré tout limitée par la complexité théorique des objets*. La série des cardinaux est en quelque sorte en équilibre entre le formalisme vide et « l'infini réel » qu'elle voudrait indiquer. Les axiomes qu'il faut chaque fois ajouter le sont ainsi en fonction de la cohérence globale de la théorie – cohérence qui n'est plus seulement une consistance logique mais la « préservation et la transmission de propriétés fondatrices à travers certaines transformations structurelles (comme le Forcing de Cohen, etc.) définies sur elle. »

Mieux, les mathématiques ne peuvent sortir d'elles-mêmes pour se circonscrire de l'extérieur. Loin d'être en position fondatrice, la logique et la méta-mathématiques deviennent des branches des mathématiques, dont une part du développement s'exprime par ce mouvement d'explicitation de ses concepts, sans qu'il n'y ait cependant de sens à vouloir l'en distinguer.

Pour le mathématicien, une fois encore, ce sont moins les concepts classiquement métaphysiques que sont l'infini, l'espace, le continu, qui ne cessent de resurgir, mais une pluralité de nouveaux concepts. Si la méthaphysique apparait bien à l'origine des mathématiques, comme l'écrit J. Merker :

> «Le niveau « conceptuel-métaphysique » de la mathématique est maintenant dépassé à cause de son élémentarité — ce n'est plus que du B.A.-BA, et les mathématiques sont maintenant bien au-delà! Les réponses non effectives et purement métaphysiques aux questions mathématiques techniques ne sont qu'un premier moment initial dans un vaste parcours imprévisible d'explorations toujours riche en surprises.[28]»

Si la philosophie peut à son tour enrichir la pratique mathématique, ce n'est certes pas en en éclaircissant d'illusoires fondements, mais en en enrichissant la plasticité conceptuelle. C'est par sa propension à prendre pour objet le non objectivable et le non formalisable que la philosophie peut proposer aux mathématiques des amorces de figures, d'angles de vue ou de stratégies démonstratives. Comme l'écrit J.-Y. Girard, la philosophie demeure bien *à ce titre* pour les mathématiques une source inégalée de potentialités inventives[29].

Réciproquement poserions-nous, si la philosophie doit de son côté se donner un *telos*, il s'agit de celui d'entretenir une plasticité maximale, de se rendre capable de comprendre à la fois les motivations d'engagements ontologiques ou de réifications diverses et de se déprendre de ceux-ci. Comme le préconise Wittgenstein, l'objet de la philosophie est bien de décrisper des nœuds qui procèdent d'une extrapolation de formes langagières et de perspectives au-delà de leur cadre d'application. Il ne s'agit pas non plus selon nous de dénier toute valeur aux prises de positions philosophiques, mais bien de développer à leur égard un rapport suffisamment assoupli pour se mettre en mesure d'en user et d'en *jouer* plutôt que d'être jouées par elles.

La mise en œuvre des objets mathématiques

À cette dimension quasi-esthétique de l'invention mathématique, il faut ajouter, nous en avons déjà dit un mot, la dimension de la mise en œuvre et de l'action. En effet, les mathématiques n'inventent pas des objets de contemplation mais, avec eux, définissent et spécifient des possibilités d'usageS, d'applications, de prises de perspectives sur ces objets

[28] J. MERKER, *Philosophie générale des mathématiques*, p. 27, http://www.math.u-psud.fr/~merker/Philosophie/2012/essai.pdf
[29] J.-Y. GIRARD, *La syntaxe transcendantale, manifeste*, 2011, p. 2, http://iml.univ-mrs.fr/~girard/syntran.pdf

et sur d'autres objets ou champs d'objets[30]. D'une certaine façon, l'objectivité du *matériau* mathématique en question importe moins que la diversité de ses mises en œuvre elles-mêmes mathématiques. La série des entiers naturels peut être considérée naïvement, de façon opératoire, ou bien comme projection de structures bien plus élaborées, mais il n'est nul besoin de ce demander quel sens prime l'autre. La question est moins sans doute ici de savoir s'il s'agit bien dans les deux cas de la même série (question qui n'a de sens que métaphysique, tout dépendant sinon de l'interprétation qu'on donne au terme « même ») que de considérer celle-ci comme matériau appréhendé selon un certain nombre d'opérations qu'on souhaite accomplir, cette perspective entrainant dans l'un ou l'autre cas l'attention à tel ou tel type de possibilités et de structures.

Certes, ces postures et perspectives sont à exercer et à stabiliser. La caractérisation la plus générale d'un domaine d'objet n'est pas, le plus souvent, celle à laquelle notre esprit incline tout d'abord. L'apprenti mathématicien peine parfois à percevoir le rapport de la structure abstraite à la série habituelle des nombres. Il conçoit la seconde comme une abstraction à partir de la première (et certes, c'est souvent, mais indirectement, le cas, la généralisation empruntant des chemins abstractifs pluriels jalonnés de détours). L'intérêt motivant un mode d'appréhension est en effet subordonné à une perspective mathématique, à un paysage lui-même fait de structures et d'objets, que le métier a pour effet de stabiliser. Le mathématicien entrainé et habitué à user des différentes caractérisations de la série arithmétique et des possibilitées que celles-ci ouvrent pour d'autres usages, finit pour sa part par rencontrer en elles plus de réalité que dans la série usuelle, parce qu'elles représentent pour lui des prises de perspectives plus enrichissantes et des possibilités d'action plus importantes.

On pourrait en guise d'analogie comparer ces deux types de perspectives à la différence entre le regard que peuvent porter sur un fauteuil un enfant en quête d'un objet pour jouer, un homme fatigué qui cherche à s'asseoir, un esthète qui examine la qualité d'ouvrage d'un meuble ancien, et un ouvrier chargé d'estimer la quantité de matériau entreposé dans une chambre et n'ayant pas même besoin d'individuer, sinon brièvement et mécaniquement, le fauteuil pour faire son calcul. L'analogie est risquée, et il ne faut pas lui faire dire plus que ce qu'elle ne dit, à savoir : les objets mathématiques ne sont pas plus que d'autres des objets inertes, et on en use différemment selon ce qu'on veut en faire, à condition de respecter les règles et définitions qui garantissent leur stabilité.

Encore une fois, il ne s'agit pas de conventionnalisme : les mathématiques sont tenues par leur *telos* mais celui-ci, étant recherche d'invariances, exploration des potentialités d'invariance, entraine le développement de structures par essence extractibles

[30] A ce sujet, cf. J. BENOIST et T. PAUL (éds.) : *Le formalisme en action. Aspects mathématiques et philosophiques*, Paris, Hermann, 2013, et en particulier l'article de J. BENOIST, « Appliquer ».

de leur contexte de naissance et réapplicables. C'est ainsi de la nature du geste formalisant de pouvoir formaliser, donc, aussi, de pouvoir lier des éléments théoriques d'une autre nature, par exemple ceux d'une théorie physique, d'autant que, par leurs ancrages corporels et gestuels, les objets mathématiques ne sont pas nativement coupés du monde physique, mais toujours peu ou prou commensurables, donc, applicables à lui.

Si, comme d'une autre façon, la danse ou la musique, les mathématiques procèdent d'une succession de gestes qui se désenveloppent les uns des autres et se raffinent et se distillent à partir de leur propre exécution, l'historicité mathématique est sans doute autrement plus pregnante (les mathématiques, contrairement à la musique, ne peuvent décider, où croire décider, de se réinventer d'un coup « à côté » de leur histoire). La « matière » de la musique, moins labille et fugitive (on fait de la musique à partir des sons, on extrait le musical du sonore), peut donner l'impression de pouvoir supporter plus facilement l'irrévérence envers sa propre tradition, alors que les mathématiques courraient le risque de sombrer aussitôt dans l'insignifiance et de cesser de pouvoir prétendre être des mathématiques.

Mais dira-t-on aussi, il y a dans la musique actuelle une dimension conventionnelle supplémentaire qui accentue encore la différence entre ces domaines qui ont pu historiquement être jugés apparentés. À notre époque, tout son peut être considéré comme musical s'il est reconnu comme tel par une part conséquente des musiciens, critiques, institutionnels, mécenes, ce qui n'est certes pas le cas des mathématiques, toute suite de raisonnements étant loin de pouvoir prétendre à l'onction de la discipline. Pourrait-on cependant exclure que le développement des mathématiques subisse dans certaines circonstances des évolutions similaires, certes à plus petite échelle ? Il faut pour répondre à cette question considérer que d'une part, indépendamment de la question de la « matière » (la matière mathématique étant, on l'a vu, une combinaison insaisissable d'éléments), la robustesse du *telos* mathématique semble incomparable.

Mais il faut aussi constater qu'il y a bel et bien des branches mathématiques plus ou moins fécondes et parfois des controverses étrangement similaires en mathématiques et en musique sur le sens de certains pans de la recherche (par exemple J.-Y. Girard qui taxe une grande partie des logiciens contemporains d'user d'un formalisme pauvre et vide), même si celles-ci restent fragmentaires et partielles, et que ni les mathématiques dans leur ensemble, ni la fécondité de la recherche mathématique, ne sont menacées par les risques de tarissement provisoire d'un secteur ou par la dérive abtractive d'un autre.

L'autre différence est bien sûr sociale : la communauté mathématique seule statue de ce que doivent être les mathématiques et de la direction qu'elles prennent ou doivent prendre. Cette communauté se coopte avec pour critère la maitrise des mathématiques existantes. Plus finement sans doute, on pourrait cependant certainement déceler des variations dans l'aiguillage (ou les aiguillages) au sein des mathématiques, de la négociation des normes du souhaitable, du rigoureux, de l'important, liées, par exemple, à la proximité plus ou moins forte avec une physique plus ou moins féconde selon les époques, et plus largement, aux relations aux différents types d'audience de la communauté mathématique (l'ingéniérie, et surtout l'informatique à notre époque, qui encourage le développement de certaines approches de la logique au détriment des autres). L'incidence de ces variations, non seulement sur les recherches et domaines explorés, mais, cela étant inséparable d'une activité de recherche, sur la fixation du (ou des) *telos*, est par ailleurs certaine, même si, en aucun cas comparable à la façon dont se négocient les normes en musique et en art.

De l'ontologie au réel mathématique

L'objet des mathématiques chez Husserl et après lui

Revenons brièvement au projet husserlien de fondation phénoménologique des mathématiques, qui se déploie de son côté selon deux orientations liées. Les formes universelles ne sont en effet chez Husserl que le versant signitif de la logique, qui doit être également caractérisée par leurs pendants objectifs. La *mathesis* articulant les combinaisons de visées intentionnelles, elle est bien affaire d'objets : la dimension ontologique est le corrélat de l'apophantique selon la structure intentionnelle. Là où l'apophantique déploie des structures noétiques, l'ontologie formelle rend compte de leurs contreparties noématiques.

En d'autres termes, les actes instaurent des positions d'objets. Il s'agit pour Husserl de montrer que les formalismes ne sont vides qu'en apparence, et qu'ils sous-entendent toujours la position, au moins implicite, des objectités qui en valident les systèmes ; la définition même des systèmes axiomatiques présuppose une visée d'objet, donc la forme générale d'un remplissement possible : la logique ne se pose elle-même comme logique pure qu'en ce qu'elle prend ce double sens apophantique et ontologique.

Bien sûr, pour Husserl, cette inhérence du logique pur et de l'ontologique demeure cachée au mathématicien qui ne raisonne pas sur le sens et la structure des actes par lesquels il produit des systèmes d'objets. Elle ne se révèle pleinement qu'à l'analyse phénoménologique qui reconnecte les systèmes d'objets posés aux systèmes d'actes dans lesquels ils peuvent être posés. Si la conscience vise toujours implicitement les formes d'objets validant les systèmes d'axiomes, c'est bien en effet que ceux-ci tirent eux-mêmes leur sens de ce qu'ils décrivent l'ensemble des enchaînements d'actes d'un *ego* transcendantal[31].

31 E. HUSSERL, *Logique formelle et logique transcendantale*, p. 198 : « Le double sens corrélatif d' « évidence » et de « vérité » que nous avons mis en lumière implique aussi manifestement un d*ouble*

La dimension ontologique ne constitue qu'un versant d'une systématique des actes de conscience dont la connaissance est le *telos* ; elle peut, comme y insiste Husserl, être méthodologiquement séparée du tout de la doctrine de la science et posée comme tâche, même s'il sera toujours à nouveau possible de rendre claire la signification épistémologique de cette ontologie. Cette logique pure – ainsi phénoménologiquement constituée dans sa pureté – reçoit alors son armature fondamentale dans l'élaboration – dans la continuité du projet riemannien, d'une théorie des types de théories. Celui-ci constitue au sein de la logique pure une *mathesis universalis* : les types de théories, sur le plan apophantique, renvoie en effet pour Husserl à des mondes ; de cette façon, Husserl entend exposer « l'idée logico-formelle d'un monde en général », comme « totalité compossible d'objets en général »[32].

Ainsi, Husserl enracine dans la logique intentionnelle l'engagement nécessairement ontologique de l'activité mathématique. Les mathématiques visent une réalité par la logique des actes qui les posent, façon élégante de répondre au débat du platonisme et du conventionnalisme, accordant une réalité intentionnelle aux objets mathématiques. Certes, la fragilité de l'édifice husserlien est d'avoir cherché à *constituer* cette ontologie, de sorte aussi que la structure des objets finaux de l'ontologie formelle dépend d'un certain état des mathématiques. Sans doute aussi demeure-t-il une certaine naïveté à passer de la question de la réalité des mathématiques elles-mêmes à la question de la réalité des objets mathématiques, et plus encore à la poser en termes ontologiques (de façon, certes plus subtile que ne le font les débats qui l'expriment en terme d'existence ou d'inexistence, et assimilent toute réalité à celle de l'objet matériel).

Pour notre part, il nous paraît plus intéressant d'opérer un double tournant, passant tout d'abord de la réalité des objets mathématiques à celle des mathématiques en général, puis en désobjectivement et désontologisant cette question, en interrogeant l'idée d'un réel mathématique.

La rencontre du réel mathématique

Comme le souligne aussi M. Richir en décrivant la structure de ce qu'il nomme le sens-se-faisant (ou parfois aussi, lphénomènes de langage), notre expérience du sens se structure comme expérience de quelque chose d'autre que le sens, même si cet autre ne doit

sens corrélatif de logique formelle : en partant de *l'orientation* traditionnelle *vers les jugements* (...) nous obtenons une *logique apophantique* (...). Si nous privilégions *l'orientation vers les objectités catégoriales possibles* elles-mêmes ou plutôt vers leur forme, alors (...) nous mettons en mouvement une *logique ontologico-formelle* mais qui (...) sera cependant astreinte pour des raisons de méthode, à prendre les objets en tant que sens, mais seulement comme moyens, tandis que le dessein final concerne les objets. ».
[32] Ce que D. PRADELLE montre de façon précise dans *L'archéologie du monde*, *op.cit.*

pas être conçu par réification de son expression linguistique (il n'est pas lui-même un objet ni un être, l'objet étant la façon dont nous en écrivons et transcrivons la réalité, l'être, le poids de cette réalité en tant qu'elle est concrétude). M. Richir entreprend en effet dans ses *Méditations Phénoménologiques*[33] de penser le sens tel qu'il est engagé, de façon plurielle, dans le système de concrétudes phénoménologiques que forment les rythmes de la phénoménalisation, système rythmique qui sert de « relai » au sens.

Le sens est ainsi compris comme processus réflexif au sein d'une masse phénoménologique en laquelle il se produit, mais qui cependant lui échappe et lui résiste aussi, et en cela, le met en mouvement, le ressource ou le fragilise. Cette extériorité phénoménologique constitue de cette façon à la fois la chair du sens, dont les rythmes lui sont coextensifs, et son référent, ce qui à la fois « veut se dire » et ne peut pas se dire. Selon M. Richir par ailleurs, cette structure du sens-se-faisant, caractérise également les mathématiques, même si, d'une façon spécifique, les mathématiques étant selon lui la seule institution symbolique, c'est-à-dire la seule institution fixant un sens du sens, à la fois capable de conserver en elle le rapport à cette extériorité intime et de limiter sa propre prolifération.

Pour aller plus loin, c'est une fois encore vers des paroles de mathématiciens qu'il nous faudra nous tourner si nous voulons mieux comprendre comment se manifeste (ou peut se manifester) le rapport à ce référent spécifique, qui n'est, une fois encore, pas référent externe au sens objectif, même s'il manifeste une robustesse et une résistance qui incite nombre de chercheurs à prendre des positions platoniciennes. Sur ce point d'ailleurs, le platonisme d'Alain Connes (exprimé dans de nombreuses interventions, et de façon assez détaillée dans l'entretien déjà évoqué) donne lieu à des descriptions très évocatrices. Alain Connes évoque en effet *la réalité archaïque des nombres* et soutient que le domaine du vrai ne se restreint pas au domaine d'inférence des axiomes d'une théorie.

Cette réalité *résiste*, dans le sens où elle ne s'épuise pas dans une appropriation, dans un usage, dans une perspective, et qu'elle semble toujours exiger des développements et des éclaircissements supplémentaires ; elle est selon Connes une *source inépuisable d'informations*. Elle impose (ou propose) des notions ou des intuitions fondamentales (comme le concept de point) qui peuvent et doivent être enrichies par l'élaboration formelle qui les stabilise et s'auto-transforme pour mieux les ressaisir. Les traits d'intuitivité dégagés par Connes diffèrent certes radicalement de ceux évoqués par Lichnerowicz (la *résistance* de la réalité s'impose par la découverte de champs de congruences inter-théoriques, par des problèmes universaux, dans le langage de la théorie des catégories, qui traversent et excèdent les élaborations qu'on en donne), mais, selon nous, les complètent, en insistant aussi sur la nécessité, pour le mathématicien, de *rencontrer* quelque chose.

---

[33] M. RICHIR, *Méditations phénoménologiques*, Grenoble, Editions Jérôme Millon, 1992.

S'il y a une forme de réalité dans les mathématiques, c'est bien au sens de cette extériorité familière, de cet appel multiforme à transgresser les limites du langage, de cette multitude d'effets aux limites d'un état donné de mise en forme théorique. Bien sûr, cette extériorité est une extériorité interne. Elle est une extériorité du point de vue du langage, constituée par lui *comme* extériorité, sans qu'il n'y ait sens à la renvoyer à aucun support, à aucune contrepartie extérieure dont le format serait homogène à la façon dont elle est poursuivie ou visée. Elle ne préexiste pas aux objets, mais n'est pas non plus créé par eux. Elle est suscitée par la tension, dont nous avons fait état plus haut, entre le langage et l'épaisseur corporelle, insinctive, sensible (et aussi historique) dont celui-ci s'élève et se détache.

B. Tessier, insiste, pour sa part, sur les sources multiples de la structure réelle (phylogénétiques, mnésiques historique) est tout aussi pertinent lorsqu'il rappelle qu'il y a en nous un primate, et qu'entre

> « (…) lui et nous il y a le mur du langage. C'est un lieu de ramification du sens, où se produisent des phénomènes irréversibles et extrêmement complexes, des tourbillons de sens et de désirs qui se condensent en mots, en syntaxe, selon des règles qui nous échappent presque entièrement. Le réel est vraiment impossible à atteindre à partir du langage en retraversant le mur (…)[34] »

Au terme trop massif et inerte du réel, J. Merker préfère de son côté l'idée d'un *ouvert mathématique*, qu'il décline selon 3 niveaux : 1 premier infralinguistique, problématique, 1 niveau interne aux axiomes (structures mathématiques et systèmes d'axiomes), 1 niveau socio-historique. Il souligne cependant bien que « (…) le réel, en mathématiques, est primordialement un réel d'ouverture, c'est-à-dire un réel de questions et de problèmes ouverts, seul « réel » qui dynamise tout esprit de recherche, de manière trans-historique.[35] »

Conclusion

L'assimilation trompeuse du logique et des mathématiques conduit nombre de philosophes à considérer, à l'instar de Heidegger dans *Qu'est-ce qu'une chose ?*, le mathématique comme paradigme de la précompréhension et de la prédétermination de la chose saisie comme objet soumis à la calculabilité et à la substituabilité[36]. Heidegger désigne par le *mathema* grec ce qui peut être appris et enseigné, en d'autres termes le sens déjà-là. Le mathématique serait la forme même d'un rapport à ce qui est structuré comme projet d'anticipation de l'étant et du format selon lequel celui-ci est amené à se manifester. La

[34] B. TESSIER, « Le mur du langage », in N. CHARRAUD et P. CARTIER, *Le réel en mathématiques*, *op.cit.*, p. 25
[35] J. MERKER, *Philosophie générale des mathématiques*, p. 24. http://www.math.u-psud.fr/~merker/Philosophie/2012/essai.pdf
[36] M. HEIDEGGER, *Qu'est-ce qu'une chose ?*, Paris, Editions Gallimard, 1971.

chose devrait alors être retrouvée hors du mathématique – touchée dans le poétique ou dans l'art.

Là contre, revenir aux mathématiques telles qu'elles se font (et non pas à ce qu'on fait, peut faire, veut faire ou à voulu faire à partir d'elles, ou, à partir de parties d'elles) révèle au contraire une discipline qui a son réel autant que ses objets, et dont la caractéristique est une capacité maximale de reprise, de réengagement et de réinvestissement.

A ce titre, les mathématiques ne se laissent certainement pas baliser de l'extérieur par une méta-mathématique définitive (même si elles usent souvent de la méta-mathématique). S'il n'est pas de critère non mathématique ou ni même de critère mathématique unique de mathématicité, il faut admettre que les mathématiques sont inséparables d'une historicité qu'elles ont pourtant pour mouvement de dépasser – en tout cas de réinvestir – et que la contingence y est présente et inéliminable. Les mathématiques sont les mathématiques – à la fois ce qui est reconnu comme mathématique par les mathématiciens et ce qui a été mathématique au cours de l'histoire.

A l'inverse, on peut cependant risquer, avec G. Longo et F. Bailly[37] une tentative de caractérisation en considérant que les mathématiques ont pour principe de toujours viser *l'invariance maximale* – non l'invariance liée à un cas, au service d'une circonstance extérieure – et qu'elles ne peuvent dès lors thématiquement admettre aucun donné ni se reposer sur lui (même si la mondanité les habite de manière implicite). Certes, concrètement sans doute, le développement mathématique est souvent lié à la recherche physique : des théories hybrides élaborées à destination de la physique peuvent être ressaisies dans l'horizon mathématique et rendues plus rigoureuses selon cette exigence, de véritables avancées mathématiques peuvent être entièrement liées à la constitution de théories physiques (par exemple, les théories de la jauge).

Bien évidemment alors, il n'y a pas de sens à vouloir baliser de l'extérieur l'extension d'une invariance qui est sans cesse à nouveau visée : toute méta-mathématique est vouée à être réappropriée et réinvestie par les mathématiques qui verront en elle les moyens de reprendre et de poursuivre leur projet. Toute méta-mathématique jugée intéressante par les mathématiciens est destinée à de multiples réécritures mathématiques.

Loin d'être l'ontologie, comme le voudrait Alain Badiou, les mathématiques attestent de l'impossiblité de l'ontologie entendue en ce sens maximaliste. Elles attestent du triomphe

[37] F. BAILLY et G. LONGO, *Mathématiques et sciences de la nature. La singularité physique du vivant,* Paris, Herman, 2002.

inexorable de la recherche de nouvelles généralisations sur toute tentative de la pensée de sortir de sa propre contextualité pour proposer un point de vue de nulle part[38].

[38] **Florian Forestier** est Docteur en philosophie, maitre de conférences associé à Sciences Po Paris et chargé de cours à l'université Paris X, à l'École Centrale Paris et à l'Institut Catholique de Paris. Sa thèse, dirigée par Alexander Schnell, et soutenue en 2011, était consacrée aux fondements spéculatifs de la phénoménologie. Elle mobilisait les ressources conceptuelles de la philosophie classique allemande pour expliciter les décisions fondamentales qui structurent le champ de la phénoménologie française récente. Inspiré par l'œuvre de Jean-Luc Nancy et celle de Marc Richir, Florian Forestier fait de la question de l'expérience de la pensée et de la réappropriation de la démarche et des concepts philosophiques l'axe principal de ses recherches. Il est l'auteur d'articles de philosophie contemporaine, de phénoménologie et d'épistémologie publiées dans des revues internationales et nationales (*Continental philosophy review, Eikasia, Annales de phénoménologie, Argus*) et de contributions à plusieurs ouvrages collectifs. Il est l'auteur de plusieurs textes littéraires : *La boite*, éditions Hervé Roth, Strasbourg, 2008, avec une préface de J.-L. Nancy, *Paysages*, éditions Hervé Roth, Strasbourg, 2008, et *La planète creuse*, éditions Hervé Roth, Strasbourg, 2013. Il est également l'auteur de trois ouvrages philosophiques. *Le réel et le transcendantal*, Grenoble, Ed. J. Millon, coll. « Krisis », *La phénoménologie génétique de Marc Richir*, Springer, coll "phaenomenologica" et *Phénoménologies fictions*, Zeta Books (à paraitre en 2016).