Synthéticité et intuition en mathématiques contemporaines : Kant au-delà de Kant

Stany Mazurkiewicz
TU Dresden / Université de Liège

INTRODUCTION

C'est là un fait relativement connu : la philosophie intuitive des mathématiques développée dans la *Critique de la raison pure* est très vite apparue comme étant en décalage avec la direction prise par la pratique scientifique des mathématiques elle-même dès le 18ème siècle. Sans même revenir sur le débat qui, de son vivant, opposa Kant à Kästner, arrêtons-nous sur un texte de 1810 de Bernhard Bolzano spécialement consacré à la réfutation de la « doctrine kantienne de la construction de concepts par [*durch*] les intuitions »[1]. Cet intuitionnisme mathématique est jugé scabreux et absolument étranger au fonctionnement propre de la science. Remarquons d'emblée que c'est bien plutôt par le biais arithmétique et algébrique que, dans ce texte, Bolzano entend dénoncer la philosophie kantienne, et non pas tant via la question géométrique[2]. Une telle perspective sera également la nôtre.

Nous voudrions faire ici l'hypothèse que le premier à problématiser – au sens noble du mot – le paradigme critique et à en pointer les limites concernant l'arithmétique n'est autre que Kant lui-même. Une telle perspective semble permettre une relativisation de la prétendue péremption de la philosophie kantienne des mathématiques et une réévaluation de l'héritage positif de celle-ci chez des auteurs postérieurs, de même qu'une critique de la supposée victoire totale de la perspective « analytique », qui, de Bolzano à Carnap en passant notamment par Frege et Russell, aurait définitivement réfuté l'épistémologie kantienne en ses

[1] *Anhang über die Kantische Lehre von der Construction der Begriffe durch Anschauungen*, publié en annexe aux *Beyträge zu einer begründeteren Darstellung der Mathematik*. Sur les rapports de Bolzano à Kant dans la perspective de l'histoire des mathématiques, on pourra lire, F. PIEROBON, « La conception kantienne des mathématiques », in S. GRAPOTTE, M. LEQUAN, & M. RUFFING (dir.), *Kant et les sciences. Un dialogue philosophique avec la pluralité des savoirs*, Paris, Vrin, 2011, p. 28-32.

[2] Bien entendu, nous nous situons ici avant la théorisation des géométries non euclidiennes. Cela n'empêche pas pour autant Bolzano de tenter dès 1804 (sans succès) une des premières axiomatisations purement logiques de la géométrie. Ce que nous voulons ici souligner, c'est que géométrie non euclidienne n'implique pas géométrie (formellement) axiomatisée, ni inversement. Souvenons-nous que Lobatchevski lui-même – certes non sans ambiguïté quant au statut de cette *géométrie imaginaire* – référait originairement le non-euclidien non pas tant à une axiomatique formelle qu'à un modèle intuitif, à une géométrie hyperbolique ; perspective qui sera poursuivie par Poincaré, Klein ou encore Riemann. Prétendre donc que le non-euclidien *per se* réfuterait la philosophie kantienne en démontrant que la géométrie n'a plus aucun rapport avec l'intuition n'est pas correct. Des penseurs aussi éloignés du formalisme que Poincaré et Brouwer ont pourtant pu avancer que les géométries non euclidiennes rendaient caduques la théorie kantienne des jugements synthétiques *a priori* reposant sur l'intuition pure. En vérité, le problème véritable qui point ici est bien plutôt la conciliation de la théorie kantienne de l'intuition avec une *pluralité de systèmes géométriques* (le paradigme euclidien et les paradigmes non euclidiens, en nombre infinis). Sur cette question voir, I. TÓTH, *Die nicht-euklidische Geometrie in der Phänomenologie des Geistes. Wissenschaftstheoretische Betrachtungen zur Entwicklungsgeschichte der Mathematik*, Frankfurt am Main, Horst Heiderhoff, 1972, p. 43-47, 58-59.

principes mêmes. Pareillement, elle rend possible une relecture de la pratique mathématique et métamathématique postérieure à Kant à l'aune de résultats kantiens majeurs, résultats que même l' « Anti-Kant » que devrait être Bolzano lui reconnaît volontiers. C'est une telle relecture que nous aimerions esquisser pour Bolzano lui-même ainsi que pour Richard Dedekind.

KANT

Commençons par revenir sur la première *Critique*. Dans la seconde Préface de l'œuvre[3], Kant se livre à une description de ce qu'est à ses yeux la méthode mathématique. Il y entend tout d'abord refuser deux perspectives. D'une part, c'est tout psychologisme, inductivisme ou empirisme mathématique qui se voit dénoncé. La mathématique est bien la science non empirique par excellence, ce que les empiristes les plus radicaux du siècle de Kant acceptait également. D'autre part, et inversement, Kant s'oppose à toute réduction de la mathématique à une science purement conceptuelle, c'est-à-dire logique. Ce sont notamment ici Leibniz et ses continuateurs qui sont visés, et leurs tentatives de fonder les opérations mathématiques sur une analytique logique dont la vérité reposerait *in fine* sur le caractère tautologique des grands principes formels, comme les principes de non-contradiction et d'identité.

Si le lieu du savoir mathématique n'est ni l'entendement logique, ni l'intuition empirique, quel est-il alors ? C'est pour répondre à cette question que Kant développe sa théorie de l'intuition pure, située en quelque sorte à l'interface de l'entendement logique et de l'intuition empirique. Si la mathématique est irréductible à une logique, c'est qu'elle procède par construction de concepts dans l'intuition (sensible) pure. Ainsi, les nombres, notamment, sont quelque chose de produit[4], par itération d'une unité, qui aboutit à l'unité d'une multiplicité, opération de dénombrement qui, en droit, présuppose un découpage du temps pur intuitif. L'ancrage intuitif de ce procédé constructif fonde le caractère synthétique du savoir mathématique, refusé à la logique formelle. Pour résumer, il est possible de dire que la mathématique kantienne est donc une science synthétique *a priori* procédant par construction de concepts dans l'intuition pure.

Or, la particularité du kantisme est d'étendre cette conception fondamentalement inspirée de la méthode géométrique d'Euclide également à l'algèbre et l'arithmétique. Là où la géométrie procède par « constructions ostensives », l'arithmétique et l'algèbre procèdent par « constructions symboliques »[5], qui n'en restent pas moins des constructions ancrées dans l'intuition pure, ainsi que nous l'avons très brièvement rappelé pour les nombres. Voilà qui n'est pas sans poser problème. En effet, une expression telle que $\sqrt{2}$ ne se laisse

[3] I. KANT, *Kritik der reinen Vernunft*, BXI-BXII.
[4] Le verbe français « pro-duire », tout comme son homologue allemand « hervor-bringen » utilisé par Kant, rencontre aisément la métaphore intuitive : il s'agit en quelque sorte d' « amener devant » (sa « vue ») les concepts.
[5] I. KANT, *Kritik der reinen Vernunft*, A717/B745.

manifestement pas produire par l'itération multipliée d'une unité[6] ; c'est ce qu'on a pu appeler en termes géométriques l'incommensurabilité de la diagonale au côté du carré. Kant est dès lors peu ou prou amené à réduire le champ de l'arithmétique au traitement des nombres rationnels[7]. Voilà qui n'est pas sans poser question puisque, contrairement aux nombres complexes comme √-a, que Kant déclare « contradictoire » et « impossible »[8], un symbole comme √2 n'est déclaré ni impensable, ni irreprésentable, et apparaît même de manière nécessaire puisqu'il trouve son *analogon* géométrique dans la diagonale du carré. Avons-nous ici affaire à des limites intrinsèques à notre faculté de connaître, ainsi que Kant semble l'insinuer, ou bien à des limites du discours justificatif de l'épistémologie critique des mathématiques ? Il est en tous cas notable qu'un lecteur sympathique de la *Critique de la raison pure* – Johann Schultz – pousse Kant à infléchir son propre paradigme épistémologique.

Face aux questionnements de son ami mathématicien, Kant va jusqu'à lui concéder ceci:

> le temps n'a, comme vous le remarquez tout à fait justement, aucune influence sur les qualités des nombres (en tant qu'ils sont de pures déterminations de la grandeur), tout comme il n'en a à peu près aucune sur la qualité de tout changement (en tant qu'il s'agit d'un quantum), qui n'est lui-même possible que relativement à une disposition spécifique du sens interne et de sa forme (le temps), et la science des nombres est, indépendamment de la succession exigée par toute construction de la grandeur, une pure synthèse intellectuelle, que nous nous représentons dans la pensée[9].

Ce texte a bien de quoi étonner et va, selon Jules Vuillemin, jusqu'à « contredire la lettre de la *Critique*, le concept de nombre étant regardé en lui-même ou métaphysiquement comme intellectuel »[10]. Notamment l'expression de « pure synthèse intellectuelle » n'est pas sans surprendre sous la plume de Kant au sujet de la mathématique.

Dans la suite de la lettre en question, Kant essaye de sauver le caractère en dernière instance intuitif de l'arithmétique en arguant que les concepts mis en jeu par celle-ci n'ont de toute façon aucune autre fonction, aucune autre destination que de s'appliquer à du matériel intuitif, géométrique ou physique. Toutefois, on peut dire que Kant sépare ici deux questions

[6] À moins de la choisir elle-même comme unité, ce qui n'arrangerait rien car on pourrait toujours alors former des irrationnels sur base de ce nouveau système numérique, ainsi que Kant semble l'affirmer dans sa lettre à Rehberg de septembre 1790, à laquelle nous nous référons également pour tout ce passage.
[7] Ce pourquoi il ne faut pas accabler Kant. Au moins depuis les pythagoriciens, le statut des nombres irrationnels pose problème, et ne sera défini de manière rigoureuse qu'à partir de Dedekind, sur lequel nous reviendrons. Au contraire, on peut trouver chez Kant un effort admirable pour penser le statut des nombres négatifs. Voir à ce dernier sujet, M. WOLFF, *Der Begriff des Widerspruchs. Eine Studie zur Dialektik Kants und Hegels*, Frankfurt am Main, Frankfurt Academic Press, 2010.
[8] I. KANT, « à August Wilhelm Rehberg », avant le 25 septembre 1790, in *Correspondance*, trad. fr. de M.-C. Challiol *et alii*, Paris, Gallimard, 1991, p. 435. Signalons que les premières représentations géométriques satisfaisantes des nombres complexes sont postérieures à la mort de Kant, et prennent leur essor à partir de 1806 avec l'*Essai sur une manière de représenter des quantités imaginaires dans les constructions géométriques* de J.-R. Argand.
[9] I. KANT, « à Johann Schultz », 25 novembre 1788, in *Correspondance*, *op. cit.*, p. 239.
[10] J. VUILLEMIN, « Kant aujourd'hui » in *L'intuitionnisme kantien*, Paris, Vrin, 1994, p. [23].

que la *Critique de la raison pure* voulait imbriquées[11] : d'une part, la constitution des concepts arithmétiques – qui, si on prend à la lettre ce dernier texte de Kant, pourrait bien être à la fois purement intellectuelle et faite d'actes synthétiques –, d'autre part, la question de l'application, seconde, de ces concepts aux représentations géométriques ou physiques[12]. S'ouvre alors un champ de questions inédites et de possibilités nouvelles ; pas seulement, d'ailleurs, en théorie des mathématiques, mais concernant le sens de toute discursivité logique.

Ce sont ces perspectives que nous semble explorer, dans des directions bien différentes, la philosophie post-kantienne, de Fichte et de Hegel au néo-kantisme de Marbourg, en passant même par Bolzano.

QUELQUES MOTS D'HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES

Sans nous appesantir sur l'histoire des sciences, on peut remarquer que le paradigme intuitif de la *Critique de la raison pure* s'avère en effet problématique au vu du développement des nouvelles mathématiques. Kant hérite d'un paradigme mathématique certes millénaire, mais qui va rapidement se trouver dépassé.

Depuis l'Antiquité, la règle, plus ou moins explicite, était bien, comme dans la philosophie transcendantale, une « dépendance de l'algèbre à la géométrie »[13], soit du symbolique aux critères intuitifs spatio-temporels, fussent-ils, pour Kant, délivrés de tout ancrage ontologique. Or, pour des raisons intra-mathématiques, une tel mode de fonctionnement finira par être abandonné. Dès le début du 16ème siècle, avec les mathématiciens de la Renaissance, notamment François Viète, l'ancrage du calcul dans les propriétés de l'espace commence à poser question. Ce problème prendra la forme d'une crise à partir de la fin du 17ème siècle et de la mise sur pied rigoureuse du calcul infinitésimal par Newton et Leibniz. Enfin, cette véritable crise des fondements avant la lettre s'achèvera – provisoirement – sur l'élaboration d'un nouveau paradigme scientifique au tournant des 18ème et 19ème siècles. Ce mouvement d'algébrisation, qui prend notamment place dans les œuvres de Lagrange[14], Bolzano et Cauchy[15], déclare rompre avec l'intuition géométrique et le critère

[11] Voir I. THOMAS-FOGIEL, « Kant et le problème des propriétés de l'arithmétique », in E. CATTIN & F. FISCHBACH (cor.), *L'héritage de la raison. Hommage à Bernard Bourgeois*, Paris, Ellipses, 2007 p. 93.
[12] Cette distinction semble pouvoir être éclairée rétrospectivement par le transcendantalisme fonctionnel de Cassirer, et notamment son œuvre mathématique, où une redéfinition de cette différence de niveau dans un cadre transcendantal nouveau joue à notre avis un rôle important.
[13] M. KLINE, *Mathematical Thought From Ancient to Modern Times*, Vol. I, Oxford, Oxford University Press, 1972, p. 279.
[14] Ceci est rendu explicite notamment dans le fait que le mathématicien se fait gloire de ne pas avoir recours aux images dans un livre de mécanique : « On ne trouvera point de Figures dans cet Ouvrage. Les méthodes que j'y explore ne demandent ni constructions, ni raisonnements géométriques ou mécaniques, mais seulement des opérations algébriques, assujetties à une marche régulière et uniforme. Ceux qui aiment l'Analyse, verront avec plaisir la Mécanique en devenir une nouvelle branche, et me sauront gré d'en avoir ainsi étendu le domaine », J.-L. LAGRANGE, *Mécanique analytique*, Paris, Desaint, 1788, p. VI.

de l' « évidence »[16] en mathématique. Exprimé autrement, la grandeur variable n'est plus immédiatement identifiable à la grandeur mesurable. Le calcul algébrique et analytique est ainsi déclaré autonome et ne devant obéir qu'à ses propres principes de rigueur logique.

Cela signifie-t-il que la philosophie kantienne des mathématiques, ainsi que d'aucuns ont pu le soutenir, n'était qu'une parenthèse malheureuse, un des derniers soubresauts d'une réflexion sur un état à jamais dépassé de la science, qui signerait la victoire sans appel d'un courant analytique de type post-leibnizien ? C'est une telle alternative – ou bien intuitionnisme transcendantal, ou bien retour aux jugements analytiques de la logique formelle – que nous entendrons refuser, ou plutôt dépasser. Une solution serait notamment de prendre appui sur cette idée avancée par Kant lui-même de « pure synthèse intellectuelle ».

BOLZANO

À cet égard, Bolzano, que l'on a pu désigner comme « l'arrière-grand-père de la philosophie analytique »[17], nous semble particulièrement intéressant. Celui-ci juge parfaitement mal venue la théorie kantienne de l'intuition mathématique, et ce y compris en géométrie, où Bolzano rejoint notamment la géométrie de position qui rompt effectivement avec toute référence à un être intuitif ou sensible pour se fonder sur des critères logiques démonstratifs[18]. Mais dans le même temps, il loue la distinction fondamentale opérée par Kant entre jugements analytiques et synthétiques, de même que sa détermination d'une partie significative des jugements mathématiques comme des jugements synthétiques *a priori*[19], là où la tradition analytique postérieure aura tendance à refuser radicalement ceux-ci et à identifier les domaines analytique et *a priori* ainsi que les domaines synthétique et *a posteriori*.

Toutefois, Bolzano déplore dans le même temps le manque de rigueur logique et propositionnelle des définitions kantiennes de l'analyticité et de la synthétiticté, ce qui aurait poussé Kant à ce recours malheureux à l'intuition pure. Ainsi, il ne suffit pas que le prédicat soit contenu (implicitement ou explicitement) dans le sujet pour traduire une proposition analytique. Bolzano avance des contre-exemples célèbres : « le père d'Alexandre, roi de Macédoine, était roi de Macédoine », ou « un triangle semblable à un triangle isocèle est lui-

[15] Pour une synthèse du problème des méthodes « géométriques » et « analytiques » chez Cauchy et Bolzano, voir H. SINACEUR, *Cauchy et Bolzano*, Revue d'histoire des sciences, 1973, tome 26, numéro 2, p. 96-112.
[16] Rappelons que *evidentia* a aussi le sens de « visibilité ».
[17] M. DUMMETT, *The Origins of Analytical Philosophy*, Harvard, Harvard University Press, 1993, p. 171.
[18] Voir les *Betrachtungen über einige Gegenstände der Elementargeometrie* de 1804. Pour Bolzano, la géométrie n'est pas tant une science de l'espace qu'une science des relations spatiales, qui sont entièrement codables par des catégories et des liens logiques, sans recours à des images, qui possèdent au contraire un caractère trompeur. Les « objets » géométriques sont des systèmes de points (un point étant non intuitif), non immédiatement congruents avec les objets physiques.
[19] B. BOLZANO, « Sur la doctrine kantienne de la construction des concepts par les intuitions », in *Premiers écrits. Philosophie, logique, mathématique*, trad. C. Maigné *et alii*, Paris, Vrin, 2010, p. 131.

même isocèle »[20], qui, d'après Bolzano devraient être déclarés par Kant à la fois empirique pour l'un ou intuitif pour l'autre et analytiques, ce qui constitue un non-sens selon les critères kantiens eux-mêmes.

Pour remédier à ces manquements, Bolzano entend alors fournir une définition plus rigoureuse de l'analyticité et de la synthéticité, anticipant la formalisation des énoncés. Ainsi, une proposition est-elle analytique s'il est possible d'y opérer une substitution sensée de l'un de ses éléments sans modifier la valeur de vérité de l'énoncé, par exemple « une *pomme* colorée est étendue ». À l'opposé, sera dite synthétique une proposition où cette substitution n'est pas possible, ainsi « le chat de mon voisin est gris »[21]. Nous voyons aussi que cette théorie de la modulation fait dépendre l'analyticité et la synthétiticité des énoncés non pas tant de l'analyse d'une proposition isolée que d'un réseau de propositions interdépendantes, les liens entre ces propositions étant selon Bolzano des relations logiques de déductions et d'implications.

Reste alors à savoir si les propositions synthétiques ainsi redéfinies engagent nécessairement un recours à une intuition, pure ou empirique. C'est précisément ce que Bolzano entend vivement refuser. Cantonnons-nous au registre mathématique. Bolzano revient notamment sur le célèbre exemple de Kant, « 7+5=12 », et déclare cette proposition non seulement non intuitive mais analytique. Elle est en effet, selon le philosophe de Prague, une simple instance de la proposition algébrique exprimant la commutativité de l'addition en algèbre classique : « a+(b+c)=(a+b)+c ». D'une part, la commutativité nous montre que l'addition ne présuppose pas, mais au contraire exclu, le recours à la condition temporelle, dans la mesure où une somme ne s'occupe que de l'ensemble [*Menge*] formé pas ses éléments, et aucunement de leur ordre. D'autre part, une fois les nombres arbitrairement définis par la relation de succession (ajouter « 1 » à un nombre produit son successeur), cette proposition peut alors se déduire de l'axiome de la commutativité par le simple jeu analytique des substitutions[22].

[20] B. BOLZANO, *Wissenschaftslehre*, § 148, in *Gesamtausgabe*, I/12, *Wissenschaftslehre §§ 121-163*, Stuttgart-Bad Canstatt, Friedrich Fromann Verlag, 1987, p. 145.
[21] Voir B. LECLERCQ, *Intuition et déduction en mathématiques. Retour au débat sur la « crise des fondements »*, Bruxelles, EME Éditions, 2014, p. 8.
[22] La preuve complète donnée par Bolzano (de « 7+2=9 », par simplicité) est la suivante :

Que 1+1=2, 7+1=8 et 8+1=9, ce ne sont que de simples définitions et des propositions arbitraires. De là il s'ensuit que

7+2=7+(1+1) *(per def.)*
=(7+1)+1 *(per propos. praeced.)*
=8+1 *(per def.)*
=9 *(per def.)*

B. BOLZANO, « Sur la doctrine kantienne de la construction des concepts par les intuitions », in *Premiers écrits. Philosophie, logique, mathématique*, *op. cit.*, p. 136.

Toutefois, il ne faudrait pas en déduire à l'analycité de l'ensemble de la mathématique. Des propositions comme celle citée ci-dessus exprimant l'associativité de l'addition ne sont pas, suivant les critères bolzaniens, analytiques, mais bien synthétiques. En effet, pour continuer avec cet exemple, il n'est pas d'élément qui puisse y être substitué *salva veritate* : l'associativité ne vaut pas de tous les concepts de relation mathématique, par exemple de la soustraction. Le philosophe étend également cette synthéticité aux axiomes de la géométrie ainsi qu'aux principes de bases de la logique formelle, comme les principes d'identité et de non-contradiction ou la validité des syllogismes, qui, au contraire, sont souvent vus comme les vérités analytiques par excellence.

Bolzano pense ces vérités comme des principes [*Grundsätze*], comme des *axiomes*. On peut dire que celui-ci fournit la première théorie de l'axiomatisation des mathématiques en un sens contemporain. Les axiomes sont des vérités en soi non déductibles, en soi non démontrables, non intuitives et synthétiques ; là où Kant fait des axiomes des règles schématiques de construction des objets mathématiques, fondant ainsi indirectement leur vérité et leur évidence par un recours à l'intuition[23]. Pour Bolzano, les axiomes sont fondateurs des enchaînements déductifs de jugements qui constituent une science, tant et si bien qu'il n'y a à proprement parler aucune vérité qui soit purement analytique, puisque *in fine* toujours ancrée dans un principe à valeur synthétique[24]. Une telle théorie entend valoir également pour la géométrie, où les conditions spatiales (et temporelles) elles-mêmes doivent pouvoir être ramenées à des principes discursifs. Insistons donc encore une fois sur le fait que cette synthéticité ne suppose aucun recours à l'intuition.

Le statut des axiomes pose évidemment problème, registre de problèmes que précisément Kant avait voulu éviter. Bolzano entend y répondre par une métathéorie logique. Si les axiomes, en tant que vérités originaires et fondatrices, ne sont pas susceptibles d'une démonstration, au sens bolzanien de *Ableitung* ou *Schluss*, ils sont toutefois sujets à une (méta)déduction, au sens de *Herleitung* ou *Deduktion*, dont le nom n'est pas choisi au hasard puisqu'elle entend précisément se substituer à la déduction transcendantale kantienne[25]. Cette opération vise à démontrer, en ne prenant appui que sur l'analyse des concepts qui le composent, l'indémontrabilité, fondée objectivement et non pas sur une limite de nos facultés de connaître, du principe, c'est-à-dire son indépendance logique. Nous faisons l'hypothèse

[23] Voir F. PIEROBON, *Kant et les mathématiques*, Paris, Vrin, 2003, p. 95-99. Les théories de G. Martin consacrées au sujet nous semblent ainsi relativement osées. Il est notamment hasardeux de résumer la mathématique kantienne de la manière suivante : « la géométrie et l'arithmétique reposent sur des axiomes et sont dans leur édification [*im Aufbau*] constructives » (G. MARTIN, *Arithmetik und Kombinatorik bei Kant*, Berlin, De Gruyter, 1972, p. 22). Il n'y a pas chez Kant un choix plus ou moins libre d'axiomes formels indépendants que l'on pourrait dans un second temps appliquer à un modèle qui leur serait indépendant. Les axiomes sont toujours surdéterminés par l'ancrage spatio-temporel de l'Esthétique transcendantale, qui définisse selon Kant le seul espace-temps possible, ainsi que par la possibilité d'une construction convenant à celle-ci, d'où la difficulté à envisager des axiomes et des modèles alternatifs.

[24] J. PROUST, *Questions de forme. Logique et proposition analytique de Kant à Carnap*, Paris, Fayard, 1986, p. 155.

[25] Voir B. BOLZANO, « Contributions à un exposé mieux fondé de la mathématique », in *Premiers écrits. Philosophie, logique, mathématique*, *op. cit.*, p. 101 sq. Au sujet de ce problème difficile, voir J. LAZ, *Bolzano critique de Kant*, Paris, Vrin, 1993, p. 48-63.

herméneutique que de telles démonstrations pourraient être qualifiées de « pures synthèses intellectuelles », leur caractère à la fois non intuitif et synthétique étant explicitement appuyé, en quoi la théorie bolzanienne serait à considérer comme bien plus subtile qu'un simple anti-kantisme, ainsi que Bolzano y invite lui-même en plusieurs endroits.

Toutefois, une telle perspective est par ailleurs largement occultée par certains développements de la philosophie de Bolzano, et plus précisément par sa théorie du sens en soi, radicalement anti-kantienne. En effet, en ramenant l'intuitif pur *a priori* kantien à du conceptuel, Bolzano estime avoir entièrement réfuté la théorie de l'intuition pure, et par là miné la prétention du sujet transcendantal à l'universalité. Afin de concrétiser ce refus martelé du « subjectivisme » et du « psychologisme » imputé à Kant, Bolzano tire une conclusion radicale : le sujet – en quoi on ne peut dès lors entendre que le sujet empirique – n'est en rien fondateur ou « créateur » du savoir objectif, notamment mathématique. Pour dépasser ce dit subjectivisme sans retomber pour autant dans un formalisme analytique, Bolzano est alors amené à mettre sur pied sa théorie du sens en soi : la discursivité qui fonde la science n'est ni celle des jugements (propositions pensées), ni celle des énoncés (propositions dites ou écrites dans l'espace et le temps), qui toutes deux dépendent d'un sujet, mais celle des propositions en soi, qui précèdent toute pensée subjective individuelle. Cette théorie, sur le détail de laquelle nous ne pouvons revenir, connaîtra une postérité certaine et sera connue comme « platonisme » logique ou mathématique. Disons simplement pour conclure ce point qu'il devient dès lors très difficile de penser en termes d'actes synthétiques, portés par un sujet, quel qu'il soit – ce qui ne sera par contre pas le cas de la position de Dedekind.

En cela, celui parmi ses immédiats successeurs qui nous semble encore le plus fidèle au kantisme est Hegel, contemporain de Bolzano dont nous dirons quelques brefs mots avant d'enchaîner. Comme Bolzano, Hegel salue cette analyse nouvelle qui rompt d'elle-même avec les critères de l'évidence et de la représentation intuitive[26]. Comme Bolzano, Hegel reproche à Kant d'avoir fait « se répandre la représentation selon laquelle la mathématique *construisait ses concepts* »[27]. Comme Bolzano, et en des termes parfois approchants, Hegel reproche à Kant son subjectivisme. Toutefois, la conclusion qu'en tire Hegel est exactement inverse : il est question non pas de refuser tout caractère fondateur au sujet, mais au contraire d'élargir la notion de sujet pour y intégrer le pan d'objectivité qui échappait irréductiblement au sujet transcendantal. De même, Hegel ne cesse de louer l'idée kantienne d'acte synthétique *a priori* de la conscience, à laquelle il prétend précisément avoir donné un sens objectif dans sa théorie du concept. Les conclusions d'une telle perspective historique – qui mobiliserait aussi bien l'histoire des sciences que celle de la philosophie – semblent avoir été bien peu étudiées en ce qui concerne ses implications pour une épistémologie résolument postkantienne des mathématiques ; sauf peut-être partiellement par Jean Cavaillès, un des rares penseurs à connaître et estimer à la fois Hegel et Bolzano.

---

[26] G.W.F. HEGEL, *Science de la logique. Premier tome – la logique objective. Premier livre, la doctrine de l'être. Version de 1832*, trad. fr. G. Jarczyk et P.-J. Labarrière, Paris, Kimé, 2007, p. 276 & 287-288.
[27] G.W.F. HEGEL, *Encyclopédie des sciences philosophiques, I, La science de la logique*, trad. fr. B. Bourgeois, Paris, Vrin, 1970, p. 457.

DEDEKIND

Revenons maintenant sur le travail de Richard Dedekind. La génération de Dedekind, Cantor et Frege pourrait passer dans son ensemble et sans nuance comme la génération qui, après les hésitations « géométriques » encore présentes dans les œuvres de Cauchy, Weierstrass et même Bolzano, met enfin sur pied la rigueur logique devant conduire à la victoire totale d'une perspective logiciste ou formaliste et à la réfutation définitive du kantisme. Nous aimerions montrer qu'il en va bien autrement chez Dedekind, non pas tant à cause d'un retard historique qui aurait tôt ou tard à être comblé – perspective qui suppose un progrès continu, orienté et unilatéral de l'histoire des sciences et de la pensée –, mais pour des raisons systématiques et épistémologiques inhérentes au projet dedekindien.

La première chose à noter au sujet de Dedekind est sa prise de distance nette avec le critère de l'intuition :

> Dans la mesure où je désigne l'arithmétique (algèbre, analyse) seulement comme une partie de la logique, j'exprime déjà que je tiens le concept de nombre pour totalement indépendant de la représentation ou intuition de l'espace et du temps, que je le tiens plutôt pour une effusion [*Ausfluss*] immédiate des pures lois de la pensée. (…) Les nombres sont de libres créations de l'esprit humain[28].

On aurait presqu'immédiatement tendance à rapprocher une telle affirmation du credo établi un peu plus tard par Frege et d'autres. Cette apparente profession de foi logiciste est toutefois à prendre avec très grande précaution. Tentons de voir en quoi le projet de Dedekind, quoi qu'absolument non intuitif, est pourtant irréductible à tout formalisme ou à tout logicisme au sens strict. Nous pourrons y parvenir en nous basant sur deux mouvements cruciaux de cette théorie : la définition de **N**, de la suite des nombres entiers naturels, et la notion de coupure [*Schnitt*], qui sert à Dedekind, à partir de l'ensemble **N**, à retrouver les autres ensembles de nombres.

Le problème très complexe d'une caractérisation logique des nombres entiers est particulièrement important pour la perspective qui nous occupe. On sait que Weierstrass, qui fait en quelque sorte le pont entre la génération de Cauchy-Bolzano et celle de Dedekind-Cantor-Frege, n'avait pas entrepris de définir les nombres entiers. De même, on connaît la célèbre citation de Kronecker, contemporain et adversaire de Dedekind : « le bon Dieu a fait les nombres entiers, le reste est œuvre humaine ». On se souvient aussi avec Kant que ces nombres sont ceux qui se laissent au mieux présenter dans l'intuition. Les nombres naturels seraient donc finalement « données », « reçus », « abstraits » ou au mieux construits dans l'intuition. Et comme cet ensemble de nombres fonde tous les autres, on pourrait alors penser inévitablement retomber dans un schéma de type aristotélicien ou semblable à celui développé par Descartes dans les *Regulae* : tout enchaînement logique ou mathématique reposerait au

[28] R. DEDEKIND, *Was sind und was sollen die Zahlen?*, Braunschweig, Vieweg et Sohn, 1961^{9}, 1888^{1}, p. III.

final sur des vérités principielles, comme les nombres entiers, qui ne pourraient être que de nature intuitive. L'enjeu d'une définition logique des nombres naturels est donc de taille.

Pour Dedekind, **N** est un ensemble infini ordonné. Un des enjeux majeurs, ainsi que nous l'avons déjà aperçu chez Bolzano, sera donc la définition de l'opérateur de succession, qui, chez Dedekind, est lié au concept de système infini. Revenons sur une des démonstrations les plus étonnantes de *Was sind und was sollen die Zahlen?* :

> Mon monde de pensée [*Gedankenwelt*], c.-à-d. l'ensemble [*Gesamtheit*] *S* de toutes les choses qui peuvent être objet de ma pensée, est infini. Car si *s* signifie un élément de *S*, alors la pensée *s'* que *s* peut être objet de ma pensée est elle-même un élément de *S*. Si on considère cet élément *s'* comme image *φ(s)* de l'élément *s*, l'application ainsi définie *φ* de *S* a alors la propriété que l'image *S'* est [une] partie de *S* ; et en effet *S'* est une véritable partie de *S*, car il y a des éléments dans *S* (p. ex. mon propre moi) qui sont différents de toute pensée telle que *s'* et partant non contenu dans *S'*. Enfin, il paraît évident que si *a*, *b* sont des éléments différents dans *S*, leurs images *a'*,*b'* sont aussi différentes, alors l'application *φ* est une application distincte (semblable). Par conséquent, *S* est infini[29].

Cette démonstration est à proprement parler irréductible à une démonstration purement logico-mathématique. Dedekind entend ici montrer que l'ensemble S', l'image de S, est par essence différent de S, contient moins d'éléments que lui. Son but est effet de pouvoir fonder l'infinité de S sur une composition qui soit une suite réflexive *différenciée* de pensées ou d'ensemble de pensées : s, f(s), f(f(s)), etc. Il faut donc à tout prix éviter que s=f(s), sans quoi l'application réitérée de la fonction *φ* tournerait à vide. On pourrait certes formaliser cette exigence[30], par exemple en termes modernes : $\exists x \forall y$ ([$x \in S$] & [$x \neq f(y)$]), mais cela ne prouve rien, ce n'est ni une tautologie, ni une conséquence analytique de principes logiques déjà démontrés où tenus pour vrais ; la justification de Dedekind est proprement philosophique, et repose en quelque sorte sur l'idéalité et l'irréductibilité du moi. Ce moi peut être vu comme un postulat inadmissible, d'autant plus parasitaire qu'il ne se laisse pas formaliser. Nous y voyons plutôt une expérience de pensée. L'essence du moi est irréductible à tout objet de pensée, à toute hypostase, dans la mesure où l'activité de celui-ci est bien plutôt ce qui est présupposée par toute fonction de type *φ*, de type « image de ». Cette structure épistémologique a pour Dedekind des conséquences certaines quant au contenu de la logique qui doit informer et guider nos pensées.

Cette justification philosophique par récurrence et réflexivité sur des actes de pensées portés par un moi est particulièrement intéressante, elle pourrait faire penser à du Fichte, pour qui un principe formel comme A=A repose aussi sur l'unité de la conscience, qui se pose comme moi pour le moi lui-même (donc sur le je suis je, sur le moi=moi). Une telle conception se distingue notamment foncièrement de la théorie objectiviste des *Paradoxes de l'infini* de Bolzano située au niveau des propositions en soi (ainsi une proposition A, « A est vraie » est elle-même une vérité B, « B est vraie » une vérité C, etc.), de même que, plus tard,

[29] *Ibid.*, p. 14.
[30] Pour une formulation et une perspective alternative, voir J.-P. BELNA, *La notion de nombre chez Dedekind, Cantor, Frege*, Paris, Vrin, 1996, p. 54-57 & 92-93.

de celle de Frege. Nous avons ici, contrairement à ce qui sera le cas chez Cantor ou Frege, une primauté, ou tout du moins une concomitance, de la structure (justificative et explicative) sur l'objet (ce sera notamment ici l'ordinalité qui fonde la cardinalité) – précédence de la structure sur l'objet qui n'est pas sans rappeler certaines des exigences centrales formulées par Kant.

Sans revenir sur le détail de l'édification, Dedekind construit alors l'ensemble **N** sur cette base logique et par le moyen d'autres définitions, comme celle de chaîne, qui est un ensemble infini ordonné, et d'autres principes, comme celui d'induction complète. **N** est alors un cas particulier définissable par ces éléments logiques : la chaîne construite par application de l'opérateur de succession sur base du nombre fondamental « 1 ».

L'intéressant pour nous est de remarquer que certains éléments fondamentaux du système de Dedekind sont irréductibles à des axiomes logiques ou formels, comme par exemple les notions de système, d'appartenance ou d'induction complète – dont Poincaré voudra justement faire l'exemple type de jugements synthétiques *a priori* dans la mathématique postérieure à Kant. De même, Hilbert reprochera à Dedekind de rester prisonnier d'un certain transcendantalisme. Frege, quant à lui, verra un flottement nuisible et porteur d'erreurs dans la définition dedekindienne de la ou des pensée(s), critiquant son prédécesseur comme n'ayant pas rompu totalement avec une forme de psychologisme, en somme, comme n'ayant pas vu dans les pensées des pensées objectivées au sens du platonisme frégéen.

Or, c'est précisément ce qui est fondamentalement impossible chez Dedekind. Les entités mathématiques comme les nombres sont, nous l'avons déjà noté, produits du pouvoir de libre création de l'esprit humain ; et la créature n'existe que par son créateur. Ainsi, si certains concepts sont irréductibles à une expression logique épurée, c'est parce qu'ils sont des *actes de pensées* portés par un sujet, qui n'existent pour ainsi dire que dans leur performativité. Par là, comme le remarque Desanti, « la question préalable de l'objet et du fondement des mathématiques n'a plus de sens »[31], en quoi nous voyons la différence du projet dedekindien avec les théories des fondements axiomatiques, formalistes ou logicistes. Nous proposons à nouveau de qualifier ces actes comme de purs actes synthétiques intellectuels.

Le caractère proprement synthétique des mathématiques dedekindiennes apparaîtra mieux en étudiant le processus de coupure, particulièrement intéressant en qu'il nous confrontera aux nombres irrationnels, qui, comme nous l'avons rappelé, restait problématique dans la perspective kantienne.

Le but du processus de coupure est de passer d'un ensemble de nombre plus simple à un ensemble d'un rang plus complexe, soit finalement de retrouver, à partir de **N,** que l'on a

[31] J.-T. DESANTI, « Préface » à DEDEKIND, *Les nombres. Que sont-ils et à quoi servent-ils ?*, Paris, la Bibliothèque D'Ornicar?, 1979, p. 7.

vu Dedekind définir logiquement, tous les autres ensembles de nombres. On peut comprendre assez « intuitivement » le concept de coupure, en en laissant la charpente logique de côté. Prenons le cas le plus remarquable : le passage de **Q** (les rationnels) à **R** (les réels). Souvenons-nous que, pour Dedekind, un ensemble de nombres est un ensemble infini déterminé et ordonné. On peut dès lors prendre **Q** et, par partage, définir, sans perte, deux classes dans **Q**. Ainsi, par exemple, les nombres dont le carré est inférieur à 2 et les nombres dont le carré est supérieur à 2. On peut alors chercher à déterminer le nombre-limite qui opère la coupure. Dans notre exemple, il s'agit, de manière assez évidente, de √2, c'est-à-dire, d'un nombre *qui n'appartient pas à Q*, l'ensemble de départ.

On a donc ici une véritable production d'un élément irréductible aux données de départ, et même engendrement d'une catégorie inédite – ici celle de nombre réel, l'ensemble **R** – possédant des propriétés que ne possédait pas **Q** : notamment, selon Dedekind, celle – fondamentale – de continuité, ainsi que celle de complétude. C'est bien là ce qu'on peut qualifier de processus synthétique.

La propriété de continuité est fondamentale aux yeux de Dedekind car elle est censée montrer que l'on a répondu, de manière entièrement algébrique et logique, au défi géométrique. Le mathématicien propose donc de regarder dès à présent les concepts d'espace et de continuité comme deux notions indépendantes, ne s'impliquant pas immédiatement. Synthéticité et non-intuitivité, donc…

Il est remarquable que, hormis le vocabulaire déjà rencontré de la création, Dedekind mobilise également le vocabulaire de la production ou de l'engendrement, notamment via le verbe *hervorbringen*[32], soit précisément celui par lequel Kant caractérisait cette « production de nombre » par construction de concepts dans l'intuition pure.

Une boucle semble ainsi bouclée. Nous espérons avoir de nouveau montré que Dedekind, malgré cette défiance envers l'intuition qui constitue le leitmotiv de la grande majorité des mathématiciens de sa génération, est bien plus « kantien » que l'on aurait pu le croire. Aussi, le paradigme de Kant nous aide, nous pensons l'avoir mis en lumière, à comprendre la pratique théorique du mathématicien, au-delà des simples refus logicistes de l'assise philosophique de Dedekind.

CONCLUSION

En guise de conclusion, posons la question suivante : ce débat lui-même est-il daté ? On sait que ce sont des résultats plutôt que la perspective philosophique globale de Dedekind qui seront repris postérieurement. À partir du début du 20$^{\text{ème}}$ siècle, notamment sous l'impulsion de Frege, les débats de la « crise des fondements » se cristallisent autour de trois

[32] Utilisé à plus de vingt reprises en ce sens à partir du paragraphe 4 de *Stetigkeit und irrationale Zahlen*, 1872.

positions canoniques : le formalisme, le logicisme et l'intuitionnisme. Par là, le partage strict entre intuition et logique que nous prétendions vouloir dépasser semblait reconduit d'une manière particulièrement exclusive et polémique.

Toutefois, un événement va venir saper les bases du formalisme de type hilbertien, qui aurait pu se présenter comme victorieux dans cette querelle d'écoles, à savoir les théorèmes de Gödel en 1931, qui viennent à nouveau entièrement rebattre les cartes et brouiller les frontières. On pourrait de même penser aux découvertes d'applications inattendues des mathématiques les plus abstraites à la nouvelle physique, notamment la théorie des groupes à la mécanique quantique. La physique nouvelle constitue ainsi un élément important dans le projet de Cassirer d'une redéfinition du transcendantalisme en accord avec les mathématiques plus récentes.

Un type nouveau de formalisme renaîtra un peu plus tard, dans les années 1960, sous la plume de Robinson, l'analyse non standard ayant été définie comme le formalisme adapté aux problèmes de l'incomplétude[33]. Toutefois, Harthong et Reeb déclarent dans ce même texte de 1987 que ce formalisme n'est pas sans ambiguïté dans sa réalisation effective et que, selon leurs propres mots, le « formalisme bien compris », c'est-à-dire compris comme une *méthode* et pas comme un ensemble de *principes*, n'est pas incompatible avec l' « intuitionnisme bien compris ». Encore une fois, le partage strict entre logique et intuition est relativisé.

Ces débats contemporains nous semblent mettre en lumière le sens, la pertinence et la portée de cet espace théorique, ouvert dans le sillage du kantisme, d'une épistémologie des mathématiques située au-delà du clivage rigide entre intuitionnisme et formalisme logique. Partis de Kant, nous sommes ainsi reconduits aux problèmes que celui-ci avait posés et ouverts, en quoi se justifie, espérons-le, notre titre : Kant au-delà de Kant[34][35].

BIBLIOGRAPHIE

BAROT E. & SERVOIS J. (dir.), *Kant face aux mathématiques modernes*, Paris, Vrin, 2009.
BELNA J.-P., *La notion de nombre chez Dedekind, Cantor, Frege*, Paris, Vrin, 1996.

[33] J. HARTONG & G. REEB, « Avant-propos » à « Intuitionnisme 84 » in *La mathématique non standard*, Paris, Éditions du CNRS, 1989, p. 211.
[34] Concernant la pertinence de la philosophie kantienne dans le cadre des mathématiques contemporaines, renvoyons à ce beau recueil d'articles récemment paru : E. BAROT & J. SERVOIS (dir.), *Kant face aux mathématiques modernes*, Paris, Vrin, 2009.
[35] Stany Mazurkiewicz a étudié la philosophie à l'Université de Liège, Belgique. Je réalise à présent ma thèse en cotutelle entre les Université de Liège et de Dresde (technische Universität Dresden), sous la triple direction de Bruno Haas, Bruno Leclercq et Jean-Renaud Seba. Le titre de la thèse est « postkantisme et révolution algébrique. Étude sur la philosophie des mathématiques et la logique de Hegel et de Bolzano ».

BOLZANO B., « Contributions à un exposé mieux fondé de la mathématique », in *Premiers écrits. Philosophie, logique, mathématique*, trad. C. Maigné *et alii*, Paris, Vrin, 2010, p. 73-130.

BOLZANO B., « Sur la doctrine kantienne de la construction des concepts par les intuitions », in *Premiers écrits. Philosophie, logique, mathématique, op. cit.*, p. 131-138.

BOLZANO B., *Gesamtausgabe, I/12, Wissenschaftslehre §§ 121-163,* Stuttgart-Bad Canstatt, Friedrich Fromann Verlag, 1987.

DEDEKIND R., *Stetigkeit und irrationale Zahlen*, Hamburg, Springer Verlag, 1965[6], 1872[1].

DEDEKIND R., *Was sind und was sollen die Zahlen?*, Braunschweig, Vieweg et Sohn, 1961[9], 1888[1].

DESANTI J.-T., « Préface » à DEDEKIND R., *Les nombres. Que sont-ils et à quoi servent-ils ?*, Paris, la Bibliothèque D'Ornicar?, 1979.

DUMMETT M., *The Origins of Analytical Philosophy*, Harvard, Harvard University Press, 1993.

HARTONG J. & REEB G., « Intuitionnisme 84 » in *La mathématique non standard*, Paris, Éditions du CNRS, 1989, p. 211-252.

HEGEL G.W.F., *Encyclopédie des sciences philosophiques, I, La science de la logique*, trad. fr. B. Bourgeois, Paris, Vrin, 1970.

HEGEL G.W.F., *Science de la logique. Premier tome – la logique objective. Premier livre, la doctrine de l'être. Version de 1832*, trad. fr. G. Jarczyk et P.-J. Labarrière, Paris, Kimé, 2007.

KANT I., *Correspondance*, trad. fr. de M.-C. Challiol *et alii*, Paris, Gallimard, 1991

KANT I., *Kritik der reinen Vernunft*, Felix Meiner Verlag, Hamburg, 1998.

KLINE M., *Mathematical Thought From Ancient to Modern Times*, Vol. I, Oxford, Oxford University Press, 1972.

LAGRANGE J.-L., *Mécanique analytique*, Paris, Desaint, 1788.

LAZ J., *Bolzano critique de Kant*, Paris, Vrin, 1993.

LECLERCQ B., *Intuition et déduction en mathématiques. Retour au débat sur la « crise des fondements »*, Bruxelles, EME Éditions, 2014.

MARTIN G., *Arithmetik und Kombinatorik bei Kant*, Berlin, De Gruyter, 1972

PIEROBON F., « La conception kantienne des mathématiques », in GRAPOTTE S., LEQUAN M., & RUFFING M. (dir.), *Kant et les sciences. Un dialogue philosophique avec la pluralité des savoirs*, Paris, Vrin, 2011, p. 25-53.

PIEROBON F., *Kant et les mathématiques*, Paris, Vrin, 2003.

PROUST J., *Questions de forme. Logique et proposition analytique de Kant à Carnap*, Paris, Fayard, 1986.

SINACEUR H., *Cauchy et Bolzano*, Revue d'histoire des sciences, 1973, tome 26, numéro 2, p. 96-112.

THOMAS-FOGIEL I., « Kant et le problème des propriétés de l'arithmétique », in CATTIN E. & FISCHBACH F. (cor.), *L'héritage de la raison. Hommage à Bernard Bourgeois*, Paris, Ellipses, 2007 p. 81-101.

TÓTH I., *Die nicht-euklidische Geometrie in der Phänomenologie des Geistes. Wissenschaftstheoretische Betrachtungen zur Entwicklungsgeschichte der Mathematik*, Frankfurt am Main, Horst Heiderhoff, 1972.

VUILLEMIN J., « Kant aujourd'hui » in *L'intuitionnisme kantien*, Paris, Vrin, 1994, p. [17-35].

WOLFF M., *Der Begriff des Widerspruchs. Eine Studie zur Dialektik Kants und Hegels*, Frankfurt am Main, Frankfurt Academic Press, 2010